MARIA JOÃO PEREIRA DA SILVA
FILIPE MENDES VIEIRA

Licenciatura em Matemática – Ramo Formação Educacional
(Pré-Bolonha)

O estudo de Pavimentações Regulares e Semi-Regulares com Ambiente de Geometria Dinâmica

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática

Orientador: Prof. Dr. António Domingos
Professor Auxiliar
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade
Nova de Lisboa

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro 2011

MARIA JOÃO PEREIRA DA SILVA
FILIPE MENDES VIEIRA

Licenciatura em Matemática – Ramo Formação Educacional
(Pré-Bolonha)

O estudo de Pavimentações Regulares e Semi-Regulares com Ambiente de Geometria Dinâmica

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática

Orientador: Prof. Dr. António Domingos
Professor Auxiliar
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade
Nova de Lisboa

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro 2011

Agradecimentos

À minha família, pela paciência infinita:

- aos meus pais, que sempre me incentivaram a ser mais…
- aos meus filhos, pela infinita felicidade de existirem;
- a todos os outros que contribuíram de alguma forma, quer pelo incentivo, quer pela ajuda com a sua disponibilidade que me permitiu realizar este trabalho.

Aos meus queridos Amigos e a alguns dos meus colegas,

- por aturarem os meus lamentos;
- por me darem força para continuar, mesmo quando as forças faltavam.

Aos meus músicos,

Jon Bongiovi, Richie Sambora, David Bryan e Tico Torres e ao Jared Leto, Shannon Leto e Tomo Miličević por serem quem todos os dias me faz ultrapassar as contrariedades através da Música e sobretudo por terem estado tão presentes na minha vida este ano e por me fazerem sempre acreditar.

Aos alunos que participaram neste estudo pela colaboração participativa.

Ao Professor Dr. António Domingos,

pela disponibilidade, pelas sugestões e incentivo que foi dando ao longo da sua orientação.

Resumo

Numa era em que as tecnologias proliferam em todas as áreas do conhecimento e da vida quotidiana, este estudo analisa o impacto que a tecnologia, no caso concreto dos ambientes de geometria dinâmica, em particular o *Geometer's Sketchpad* (GSP), tem na aprendizagem da Matemática e em particular no ensino da Geometria e da demonstração de propriedades geométricas.

A revisão de literatura baseia-se essencialmente em utilização de tecnologias no ensino da matemática e no tema da demonstração matemática na situação específica do ensino desta associada à utilização de ambientes de geometria dinâmica analisados na perspectiva da sua integração em contexto curricular e como motivação para as aprendizagens.

A metodologia utilizada é de natureza qualitativa e recorre a estudos de caso. Procedeu-se à recolha de dados em contexto de aula sendo responsabilidade da professora/investigadora e assentam predominantemente em observação e registo das actividades/notas de campo, construções (*sketches*) e documentos produzidos pelos alunos, conversas informais e entrevistas orientadas em função das questões do estudo e à luz da revisão da literatura efectuada.

Após a análise dos dados recolhidos, pode perceber-se que os alunos tiveram algumas dificuldades no cumprimento das tarefas propostas, e fundamentalmente na compreensão do papel da demonstração. Apenas um grupo de alunos reconhece a função de validação e explicação da demonstração considerando esta última a principal função da demonstração matemática.

A maior parte dos alunos revelou dificuldade em formular conjecturas e manipular resultados algébricos relativamente ao tema em estudo. Por outro lado, revelaram um bom desempenho ao nível da utilização de isometrias na construção de pavimentações sendo que numa fase inicial eram conduzidos aos resultados iniciais por imposição das tarefas mas posteriormente revelaram saber aplicar com correcção as isometrias (na construção de pavimentações).

Todos os alunos se sentiram motivados para o estudo das pavimentações recorrendo ao *software*, sendo que a motivação inicial era bastante superior à demonstrada na fase final dos trabalhos pela complexidade (segundo eles) de algumas das tarefas e, de um modo geral, reconheceram que a tecnologia é motivadora e facilitadora das aprendizagens em geometria.

Palavras-chave: Ambientes de Geometria Dinâmica; Conjectura; Prova e Demonstração; Pavimentação; Aprendizagens; *Geometer's Sketchpad* (GSP)

Abstract

In a age where technology lead most of real life and knowledge areas, this study intend to analyze the impact that technology, in particular dynamic geometry software, has on teaching geometry and proof concerning geometrical properties.

The literature review is focused to the use of technology in teaching mathematics and teaching proof within the use of geometric environments as part of the curriculum and as a motivation to learn geometry.

The methodology of this study is qualitative as a case study. All the data was collected by the teacher/investigator, in a class context. Most of the data is concentrated on observations and analysis on student's activities as well as in the sketches (Geometer's sketchpad files) and student's reports based on their constructions, informal interviews and guided ones with focus on the questions of this study and according to the literature analyzed.

Some of the students didn't quite end up all the tasks mainly because they hardly understand the role of proof. Just a small group of students recognize proof as a validation and explanation, this one well recognized as the most important role of proof.

Most of the students had problems making conjectures and manipulating algebraic results about tilings. On the other hand they managed to use isometries building tillings. First they were induced by the guided tasks but as their work increased they could use with correction isometries when building tiles.

In general, all of the students felt motivated for studying tiling's using dynamic geometry software even though they seemed a lot more motivated in the beginning of the study due to the complexity (as they said) of the final tasks. However they also recognized that technology can work as a motivation and makes it easier studying geometry.

Key Words: Dynamic geometry software; Conjecture; Proof and proving; Tilling; Learning; Geometer's Sketchpad (GSP)

Índice de Matérias

Índice de Figuras

Lista de Abreviaturas

AGD – Ambientes de Geometria Dinâmica

GSP – *Geometer's Sketchpad*

APM – Associação de Professores de Matemática

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Como professora de Matemática tem sido uma preocupação ao longo destes anos de ensino que as aprendizagens dos alunos sejam significativas, que desenvolvam um trabalho autónomo em contexto de sala de aula e se sintam motivados para o estudo da disciplina, tarefa nem sempre fácil, consequência da carga social que a disciplina de Matemática carrega.

De há uns anos a esta parte, os alunos revelam cada vez menos predisposição para realizar trabalho autónomo e sobretudo estão bastante desmotivados no que respeita ao estudo na disciplina de Matemática e em particular da Geometria. Consideram especialmente o tema difícil e atribuem o seu mau desempenho à "falta de bases" e de aplicações dos conceitos em situações da vida real. No caso específico dos alunos dos Cursos Profissionais esta predisposição é mais acentuada pois são normalmente alunos com um percurso escolar mais irregular, a maioria das vezes com um mau desempenho à disciplina e por isso carecem da falta de alguns pré-requisitos. Questionam quase sempre a ligação entre as questões do dia-a-dia e as aprendizagens que adquirem, muito fruto da escolha da vertente profissional destes cursos. Desta forma, o estudo das pavimentações insere-se neste âmbito, por estar implicitamente integrada na vertente prática do curso (Design Gráfico).

A forma como os conceitos teóricos e o aspecto da formalização matemática é abordada ganha novo corpo quando se trabalham com alunos com estas características. As ferramentas, como os ambientes de geometria dinâmica, permitem a utilização de todo um tipo de tarefas diversificadas que permitem explorar conceitos, trabalhando as aplicações matemáticas, favorecendo a experimentação e são uma mais-valia no que respeita à motivação dos alunos. Faz então sentido que se questionem o tipo de aprendizagens desenvolvidas e adquiridas, mais especificamente no que respeita à questão da conceptualização matemática.

É no âmbito do que foi descrito que se inserem as motivações para este estudo: compreensão do tipo de aprendizagens adquiridas com um tipo de metodologia que não a tradicional aula expositiva, num tema tão abrangente e delicado como é o domínio dos conceitos geométricos e da demonstração de resultados matemáticos, nomeadamente os que se referem a resultados geométricos relativos às pavimentações.

PROBLEMA, QUESTÕES E OBJECTIVOS DO ESTUDO

Os desafios que se impõem hoje no ensino da matemática, e mais especificamente no ensino da geometria estão também relacionados com a proliferação de utilização de novos recursos e metodologias que se prendem directamente com a generalização cada vez maior da utilização das tecnologias de informação e comunicação (TIC) nomeadamente através de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), como o *Geometer's Sketchpad*(GSP).

> As novas tecnologias estão a transformar rapidamente o panorama da matemática e do seu ensino. O chamado software para geometria dinâmica, representado pelos programas *Cabri-géomètre* e *The Geometer's Sketchpad*, tem potencialidades para revolucionar profundamente os modos de resolução de problemas e de exploração de situações e as próprias concepções de demonstração, em particular a sua relevância na aprendizagem da geometria. (Veloso, 1998, p. 60)

Os programas de Matemática do Ensino Secundário, de um modo geral e em particular para os Cursos Profissionais, apontam para a utilização de computadores e programas de geometria dinâmica de modo a concretizar as competências a adquirir.

Este estudo incidirá sobre o tema pavimentações, em particular nas pavimentações em que os ladrilhos são polígonos regulares e em que todos os pares de arestas adjacentes têm uma aresta de pavimentação comum. Pretende-se focalizar o estudo: podiam ser explorados vários tipos de pavimentações e variados resultados associados ao estudo das mesmas, no entanto o alargar do estudo a pavimentações não regulares (como as de M.C. Escher por exemplo) dispersaria resultados que poderiam não ter interesse para o que se pretende analisar, o tipo de aprendizagens significativas do ponto de vista matemático e da geometria. Por outro lado, o facto de os alunos frequentarem um curso de Design faz com que possam explorar a vertente estética e criativa das pavimentações enquanto "ferramenta" de trabalho:

> As actividades com pavimentações são suficientemente estimulantes para, mesmo num ambiente restrito como este, proporcionarem investigações interessantes e válidas, tanto na sua vertente matemática como de um ponto de vista visual e estético. (Veloso, 1998, p.209)

Considerando as vastas potencialidades que a utilização dos AGD tem no ensino da Matemática, e em particular no ensino da Geometria, e no ensino da demonstração aliada ao estudo de propriedades geométricas, em particular, no caso específico do estudo das pavimentações regulares e semi-regulares, pretende-se dar resposta às seguintes questões:

A. Com a utilização de um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) que tipo de aprendizagens estão associadas ao estudo das pavimentações?

B. Que tipo de conhecimentos os alunos mobilizam para a construção de pavimentações, quando utilizam um ambiente de geometria dinâmica?

C. A utilização do *Geometer's Sketchpad* (GSP) em actividades específicas de exploração ou investigação em geometria influencia o modo como os alunos perspectivam o estudo da Geometria em geral?

D. A utilização do GSP desencadeia a necessidade de validação das conjecturas e demonstração (no contexto das propriedades das pavimentações)?

Dentro das questões que se colocam será dada, inevitavelmente, ênfase ao papel da demonstração matemática procurando compreender se os alunos sentem necessidade de elaborar conjecturas quando exploram resultados com características comuns (generalização) e se por outro lado sentem necessidade de validar as suas conjecturas passando para o processo de prova/demonstração. Se por um lado é consensual que os AGD estimulam a elaboração de conjecturas, por outro a necessidade de efectuar prova ou demonstração não está sempre presente.

O tema da demonstração matemática e da necessidade de a utilizar, enquanto processo formal no âmbito da conceptualização matemática é, à luz das investigações actuais, de grande importância uma vez que alguns investigadores colocam algumas questões sobre o que pode ser aceite como demonstração, como por exemplo Mariotti (2006), sustenta que a visualização e experimentação decorrentes da utilização de AGD podem ser consideradas processos demonstrativos. Esta questão é bastante polémica e remete o papel da demonstração matemática para o da experimentação desprovendo-a da componente conceptual.

Grande parte dos estudos respeitantes à utilização de AGD tem um enfoque muito acentuado no papel da demonstração matemática associada, na maioria das vezes, a resultados geométricos ou resultados algébricos resultantes de propriedades geométricas. Este estudo pretende ser mais um contributo nessa área procurando respostas às questões acima colocadas e deixando em aberto outras que poderão ser objecto de futuras investigações.

RELEVÂNCIA DO ESTUDO

A utilização das novas tecnologias de informação a serviço do ensino e aprendizagem da Matemática tem sido alvo de reflexão quer em Portugal, quer no estrangeiro.

Nos últimos anos proliferaram estudos sobre o papel que estas novas ferramentas desempenham no ensino da matemática uma vez que entraram de forma inequívoca no dia-a-dia das escolas e dos alunos: a utilização da calculadora gráfica generalizou-se no ensino da matemática a nível do ensino secundário e as escolas foram equipadas com computadores que com a instalação de *software* adequado permitem uma diversificação de experiências de aprendizagem que até à data não eram possíveis ou apenas estariam acessíveis a pequenos grupos de alunos. Estas novas ferramentas promovem a realização de trabalhos de investigação e exploração aliados a um envolvimento mais efectivo dos alunos desenvolvendo o trabalho autónomo e proporcionam momentos de aprendizagem significativos. Assim, os conteúdos matemáticos podem ser abordados de uma forma mais interessante e motivadora para os alunos dando-lhes o papel de actor principal na sala de aula:

> Estas tecnologias permitam que os alunos tenham um papel mais activo na sala de aula, possibilitando uma experiência matemática onde há lugar para a investigação, formulação e teste de conjecturas próprias, e para a discussão e comunicação matemática (Ponte e Canavarro, 1997, p.102)

No que diz respeito ao ensino da Geometria e da utilização dos ambientes de geometria dinâmica, as potencialidades de exploração de situações geométricas, através da manipulação e construção de objectos matemáticos promove um ambiente de exploração e investigação participado criando situações propícias à formulação e teste de conjecturas.

> A utilização da calculadora e do computador oferece um contexto favorável a que os alunos trabalhem de forma criativa, formulando e testando conjecturas próprias e explorando ideias diversas. (Ponte e Canavarro, 1997, p.107)

As orientações curriculares para o ensino da Matemática vão no sentido de que as tecnologias devem ser utilizadas com a regularidade necessária para desenvolver competências e capacidades nos alunos, nomeadamente no que diz respeito às ligadas ao raciocínio e à comunicação matemática, através de tarefas de natureza exploratória e/ou investigativa. Como referem alguns estudos citados por Ponte e Canavarro (1997, p.126) relativos à utilização de *software* no estudo da Geometria *(Cabri-Geomètre)*, em contexto de utilização de tarefas de investigação, os alunos desenvolvem competências no âmbito da compreensão de objectos geométricos e das relações entre os mesmos e, do desenvolvimento do raciocínio dedutivo e indutivo assim como no âmbito do desenvolvimento de capacidade de visualização de objectos matemáticos e as suas transformações.

Como professora de Matemática foi sendo preocupação constante ao longo da carreira, a utilização de novas metodologias de aprendizagem, incluindo muitas vezes as TIC, nomeadamente o *Geometer's Sketchpad* no ensino da Geometria, indo de encontro do cumprimento dos objectivos dos programas, tentando estimular nos alunos o gosto pela aprendizagem da Matemática, proporcionando experiências matemáticas ricas através da diversificação de instrumentos de aprendizagem.

> Ao nível do secundário, os AGD podem (e devem) transformar completamente o ensino e a aprendizagem da Matemática. A geometria dinâmica transforma a Matemática num laboratório científico em vez de um jogo de ginástica mental, dominado pela computação e manipulação simbólica, que se tornou em muitas das nossas escolas secundárias (Olive, 2000, p.17)

Como já foi referido, o uso de tecnologia na sala de aula, neste caso do computador com *software* apropriado (AGD) diversifica o tipo de tarefas a propor aos alunos assim como diversifica aprendizagens. O tipo de tarefas é privilegiadamente de natureza exploratória e investigativa. As tarefas podem envolver a manipulação de *sketches* previamente construídos utilizando os resultados obtidos para explorar situações "padrão" decorrentes dessa manipulação. Noutras situações podem envolver a construção de *sketches* de modo que a construção do *skecth* pode ser o início da tarefa de investigação. O papel que este tipo de tarefas desempenha na educação matemática tem sido largamente investigado por diversos autores:

> As investigações matemáticas precisam de ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da Matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes – e têm importantes potencialidades educacionais (por exemplo, estimulam o tipo de participação dos alunos que favorece uma aprendizagem significativa, proporcionam pontos de entrada diferentes facilitando o envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões) (Santos et al., 2002, p.2).

Todas as tarefas deste tipo são naturalmente acompanhadas de relatórios escritos de forma a formalizar aprendizagens e como meio auto-regulador deste processo.

Assim, é de igual modo necessário e importante reflectir sobre esta prática, essencialmente no que diz respeito ao ensino da Geometria, através da utilização de AGD, e perceber que tipo de aprendizagens significativas os alunos adquirem. Pela sua natureza própria, as tarefas de investigação deveriam favorecer a formulação e teste de conjecturas. O facto de utilizarem um AGD permite aos alunos num curto espaço de tempo realizar um sem número de experiências restando assim mais tempo para o trabalho formal. Para além disso pode ser pertinente perceber que tipo de conhecimento matemático e qual o tipo de raciocínio é utilizado, assim como as competências matemáticas que são adquiridas e quais são mobilizadas na construção desse conhecimento. Colocam-se, assim, numerosas questões decorrentes da utilização dos AGD como ferramenta de investigação em matemática, Sträßer (2002, pp.65-77) ao considerar que em termos de investigação, os ambientes de geometria dinâmica podem ser dos melhores, se não os melhores *softwares* de investigação em educação matemática (Jones, 2005, p.28).

Os programas de Matemática do Ensino Secundário, de um modo geral e em particular para os Cursos Profissionais, apontam para a utilização de computadores e programas de geometria dinâmica no sentido de concretizar as competências a adquirir. É esperado que os alunos se apropriem de conceitos e de técnicas matemáticas procurando dar resposta a problemas reais quando confrontados com os mesmos mobilizando os conhecimentos científicos adequados. É sugerido de forma clara que as opções metodológicas devem contemplar actividades matemáticas que permitam "explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas e raciocinar logicamente". (Programa de Matemática dos Cursos Profissionais, 2004, p.4) apontando a demonstração matemática como uma competência a desenvolver.

O estudo incidirá então sobre a utilização de um ambiente de geometria dinâmica na aprendizagem de um tema do programa de Matemática: Pavimentações; e pretende dar resposta às questões anteriormente enunciadas, essencialmente no que diz respeito ao tipo de aprendizagens realizadas e competências adquiridas resultantes da aplicação de actividades de investigação e exploração utilizando o *Geometer's Skecthpad*.

ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO

Este estudo está organizado em cinco capítulos, sendo que o primeiro é de introdução. O segundo respeita à revisão de literatura e fundamentação teórica para o mesmo. No capítulo II são efectuadas algumas considerações sobre o ensino da Matemática com novas tecnologias, em Portugal e no estrangeiro e sobre a utilização de AGD no ensino em particular da Geometria. Serão apresentadas algumas conclusões de estudos nesta área, nomeadamente as vantagens de utilização de tecnologia no ensino da Geometria. Para além disso far-se-á uma breve abordagem do currículo dos Cursos Profissionais relativamente às competências que os alunos devem adquirir e sobre o tipo de opções metodológicas a adoptar, nomeadamente as que incluem a utilização de tecnologias e a integração de actividades de exploração e investigação.

A segunda parte deste capítulo é dedicada à demonstração no ensino da Matemática e em especial na Geometria assim como o papel que os AGD têm desempenhado no ensino da demonstração matemática. Serão abordadas, embora de uma forma mais abreviada, também algumas questões relativas à visualização e pensamento espacial e motivação para a aprendizagem da Geometria e da demonstração matemática. No final deste capítulo serão ainda abordadas algumas questões, objecto de investigação actual, como por exemplo que tipo de raciocínio é utilizado durante a fase de conjectura num problema aberto em geometria dinâmica ou de que forma os mesmos contribuem para o desenvolvimento da demonstração de uma conjectura. Estes factores são pertinentes na medida em que se enquadram no presente estudo que poderá ser um contributo para um melhor entendimento destas questões. Para além destes e à luz destas novas ferramentas colocam-se algumas questões sobre o que constitui demonstração em geometria dinâmica sendo este um tema actual e controverso.

O terceiro capítulo é dedicado à metodologia. Serão descritas as opções metodológicas: estudo de caso e as razões que conduziram a esta opção assim como o papel da investigadora como professora (ou vice-versa), a descrição dos participantes no estudo e o processo de selecção dos mesmos. Acresce a descrição dos instrumentos produzidos: o tipo e descrição das tarefas desenvolvidas, as razões para a utilização das mesmas e a metodologia de trabalho utilizada nas aulas, isto é, a prática lectiva em grupo turma.

No capítulo IV será feita a análise e discussão dos resultados. Será apresentada a caracterização da turma e dos respectivos grupos de trabalho (pares) no que respeita a diversos factores: à dinâmica de grupo (pares), ao cumprimento das tarefas e dos seus objectivos tendo em conta a cadeia de tarefas que foi desenvolvida e aplicada, o contexto de trabalho do grupo (par) e do grupo turma e ainda relativamente ao produto da realização das mesmas, isto é, aos *skecthes* construídos e relatórios apresentados, resultado de cada tarefa concluída. Ao longo do capítulo surgirão algumas considerações resultantes das observações efectuadas e do produto dos trabalhos dos alunos.

Por último, o quinto capítulo apresenta a síntese deste estudo, as conclusões e reflexões resultantes do mesmo, assim como o levantar de outras questões para futuras investigações.

CAPÍTULO II- Fundamentação do Estudo

Este capítulo aborda em duas partes as questões essenciais relativas a este estudo; tecnologias e a geometria na educação matemática e as múltiplas perspectivas de demonstração. Pretende-se dar uma perspectiva geral sobre a investigação existente relativa ao uso de tecnologia no ensino da geometria, nomeadamente no caso da utilização de ambientes de geometria dinâmica, e uma perspectiva da sua integração no currículo da disciplina de Matemática e, por motivos inerentes ao estudo, o caso particular da sua integração no currículo dos Cursos Profissionais.

Como se verá, da utilização de tecnologia no ensino da Matemática e da Geometria é impossível não referir o tipo de trabalho realizado, tais como as tarefas de investigação e exploração que são indubitavelmente associadas à elaboração de conjecturas e demonstração. Serão, por isso abordadas, algumas questões relativas a este tema tais como a demonstração no ensino da geometria e a demonstração e a utilização de ambientes de geometria dinâmica particularizando algumas questões associadas como sejam as funções da demonstração e a motivação para demonstrar. Serão, ainda, focadas algumas questões que se colocam actualmente sobre esta temática.

AS TECNOLOGIAS E A GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Numa sociedade cada vez mais desenvolvida as novas tecnologias passaram a assumir um papel inquestionável nas vidas de todos nós, quer a nível pessoal quer profissional e o ensino não foi excepção. Torna-se então importante reflectir sobre o papel que as tecnologias desempenham no ensino da Matemática e em especial da Geometria, neste caso pela utilização de AGD e sobre a forma como as mesmas integram o currículo da disciplina. São algumas destas reflexões que se apresentam em seguida.

Um dos princípios recomendado para o ensino da Matemática é o princípio da tecnologia.

> A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos (NCTM, 2000, p.26)

Não sendo a solução dos problemas do ensino, a tecnologia pode ser uma ferramenta muito útil e quando utilizada de modo adequado pode ser bastante eficaz na aprendizagem da Matemática. Pode inclusive ser uma ferramenta que permita envolver mais os alunos na sua aprendizagem proporcionando experiências diversificadas de acordo com o seu nível de conhecimento e maturidade intelectual.

Em 1997, Paulo Abrantes, professor e investigador na área do ensino da Matemática fez, para a revista Educação e Matemática da Associação dos Professores de Matemática, à data do encontro nacional de professores desta disciplina, o balanço da investigação em Portugal, decorrida nos últimos dez anos, sobre a utilização de tecnologia no currículo de Matemática. No final deste balanço refere:

> "Há evidência de que a tecnologia pode constituir um suporte valioso para que os alunos se apropriem de ideias e processos fundamentais em áreas como a geometria e as funções" (Abrantes, 1997, p.31)

Foi no final dos anos 90 que se verificou o grande *boom* da utilização de tecnologia gráfica, em Portugal, através das calculadoras gráficas mas muitos estudos centravam-se na utilização do computador como instrumento central, pelos investigadores. Inicialmente utilizado em investigações com a utilização da linguagem LOGO, começou a ser alvo de outro tipo de investigações, nomeadamente pela utilização de ambientes de geometria dinâmica, como por exemplo o *Cabri-Géometre*.

Em numerosas publicações são elevados os benefícios da utilização de tecnologia em sala de aula, e são debatidas as consequências da utilização das novas tecnologias no Ensino da Matemática. Ponte e Canavarro (1997) apontam como benefícios o desenvolvimento de atitudes e valores positivos face à disciplina, a promoção da confiança, autonomia, cooperação e espírito de tolerância, no que diz respeito ao domínio das atitudes e valores. No que diz respeito à aprendizagem da matemática referem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o raciocínio matemático. As tecnologias retiram poder à aprendizagem da técnica favorecendo a exploração e investigação extensível à capacidade de resolução de problemas.

O computador permite diversificar o conjunto de tarefas matemáticas pelo facto de ser possível realizar inúmeras experiências matemáticas num curto espaço de tempo, assim como a manipulação e a diversificação de tarefas que podem mobilizar diversos tipos de conhecimento.

Com a introdução de novas tecnologias a base do ensino da Matemática está em permanente desafio. Vários estudos invocam o papel da matemática como experimental, desafiadora e empreendedora em grande parte devido à contribuição destas novas ferramentas.

Ambientes de geometria dinâmica e o ensino da geometria

Os estudos feitos a nível nacional e internacional realçam o papel preponderante que os AGD têm no ensino da Geometria em geral e na demonstração de propriedades e resultados na Geometria, em particular.

> Em Geometria, uma área do currículo intimamente ligado ao desenvolvimento do método dedutivo, os programas de software geralmente conhecidos como ambientes de geometria dinâmica, parecem ter o potencial de fornecer aos estudantes experiência directa de teoria da Geometria e por isso deitam por terra o que pode ser uma infeliz separação entre construção geométrica e dedução. Como tal, a utilização pelos estudantes de AGD pode ter um importante papel permitindo aos alunos que formulem explicações dedutivas e forneçam uma base para o desenvolvimento de ideias de prova e demonstração (Jones, 2001, p.56)

Parece ser ponto concordante entre vários investigadores que são várias as potencialidades da utilização de AGD em sala de aula, sempre associadas a actividades de investigação e tarefas de natureza exploratória por permitirem a realização de um grande número de tarefas num curto espaço de tempo (Veloso, 1998) favorecendo a experimentação e criando oportunidades adequadas para conjecturar, explicar e justificar resultados (Burrill 2008)

No entanto, a utilização do *software* por si só não é condição necessária e suficiente para que os alunos aprendam Geometria:

> A utilização criteriosa de tarefas e sequências de tarefas apropriadas pode conduzir a muitos dos benefícios que a utilização dos AGD fornece ao ensino da Geometria: os alunos exploram e elaboram conjecturas, (re) descobrem e investigam relações e propriedades geométricas, e são mesmo conduzidos, nalguns casos a desenvolver demonstrações. (Jones, 2005, pp.27-29).

De um modo geral a utilização dos AGD como o GSP impulsiona o raciocínio dedutivo. Com a utilização de tarefas adequadas os alunos através da experimentação são conduzidos a um número de resultados (conjecturas):

> Uma variedade de investigações mostram que a interacção com AGD pode ajudar os alunos a explorar, conjecturar, construir e explicar relações geométricas. Pode mesmo fornecer-lhes as bases para a construção de provas dedutivas (Jones, 2005, pp.27-29)

Alguns estudos referem que as questões e resultados que surgem decorrentes da aplicação de tarefas de exploração/investigação podem ser impulsionadoras da necessidade de provar resultados, mesmo que muitas vezes isto se aplique a um reduzido número de alunos:

> A aprendizagem dos alunos foi além dos conteúdos de Geometria habituais, reinventam definições, fazem conjecturas, colocam e resolvem problemas significativos e desenvolvem provas originais. Fazer conjecturas não foi fácil para os alunos mas, eventualmente quase todos as fazem e justificam as suas generalizações (Battista e Clements, 1995)

Não são também de descurar as questões de utilização correcta do *software* que à partida não deverão ser um entrave à aplicação das tarefas. No entanto é natural, devido inclusivamente às características pessoais de cada aluno, que alguns tenham mais aptidão e mais destreza na utilização do *software* o que pode condicionar o seu desempenho, a concretização de tarefas e mesmo alterar o seu grau de motivação.

> Os alunos que usam AGD demonstram formas diferentes de comportamento reflectindo os diferentes níveis de perícia dos seus conhecimentos sobre os sketches. (Whiteley, 2000, p.4)

Apesar de a utilização do computador e dos AGD possa ser vista sempre de uma forma um pouco lúdica, por parte dos alunos, é importante que percebam que estão perante uma ferramenta utilizada por matemáticos. Investigadores como Whiteley (2000) apontam os AGD como ferramentas poderosas utilizadas pelos geómetras e não “um brinquedo” educacional e sugere que as actividades para os alunos podem ser modeladas sobre o mesmo tipo de explorações e comunicação que os geómetras.

Numa perspectiva pessoal, considera-se ainda o GSP, como AGD, vantajoso no sentido que as construções não são imediatas, são necessários conhecimentos elementares de Geometria que permitam muitas das construções, pois caso não sejam correctamente efectuadas as figuras “desmancham-se”. Por outro lado, reconhece-se potencialidades de exploração de conexões entre a Geometria e outros temas da Matemática, como por exemplo a Álgebra, as Funções, entre outros.

A Associação de Professores de Matemática dedica um número da revista Educação e Matemática ao ensino da Geometria em Portugal, com vários artigos, grande parte dedicada à utilização da geometria dinâmica no ensino como parte integrante do currículo e todos os artigos evidenciam as vantagens de utilização de AGD, relatam boas práticas e estudos relativos à aprendizagem da Geometria:

> (….) A geometria dinâmica pode contribuir para que se perceba efectivamente geometria, para além de a usar como mais um pretexto para efectuar cálculos (…)
> No ensino da Geometria é fundamental que o professor possa recorrer a uma componente visual e dinâmica que permita a mais fácil percepção pelos alunos das propriedades geométricas, variantes ou invariantes, o que implica que melhor se identifiquem com a disciplina de Matemática, incrementando o seu gosto por ela, o que naturalmente é sinónimo de sucesso escolar. Desenvolvem-se, assim, no aluno as capacidades de interpretação, compreensão, construção, análise, conjectura e aplicação inerentes à aprendizagem da Geometria. (…) (Pedro Pimenta, 2007, p.37)

Verifica-se, de um modo geral, consenso relativo aos benefícios da utilização de ambientes de geometria no ensino da geometria desenvolvendo nos alunos um conjunto diversificado de capacidades e competências em domínios mais alargados como o da demonstração matemática.

A Matemática e a Geometria no Currículo dos Cursos Profissionais

O currículo de Matemática dos cursos Científico - Humanísticos (Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais) apresenta no âmbito das capacidades/ aptidões como denominador comum "desenvolver o raciocínio e o pensamento científico" que inclui o formular generalizações a partir de experiências e a validação de conjecturas e, no caso dos programas de Matemática A e Matemática B, "fazer raciocínios demonstrativos utilizando métodos adequados" (Programa de Matemática A, 2001, p.4; Programa de Matemática B, 2001, p.5). Importa então saber em que medida estas capacidades e aptidões se enquadram no âmbito do currículo dos Cursos Profissionais do Ensino Secundário e considerando que de um modo geral como resultado da sua experiência matemática, os alunos devem interiorizar a natureza desta disciplina como ciência:

> (…)a aprendizagem em Matemática deve proporcionar oportunidades para que os alunos:

> - Desenvolvam actividades de investigação e reflictam sobre o que é investigar em matemática;
> - Apresentem justificações, argumentem, demonstrem, organizem localmente a matemática e reflictam sobre o carácter dedutivo e axiomático da matemática como ciência. (Veloso, 1998, p.362)

A introdução de cursos profissionais no ensino secundário, nas escolas secundárias originou desde 2004 a leccionação de um novo currículo de Matemática com finalidades e objectivos diferentes dos currículos de prosseguimento de estudos (Cursos Cientifico - Humanísticos).

Entre as competências a desenvolver pelos alunos pode-se ler:

> A Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar que é distinto de outros ligados a diferentes áreas do conhecimento e da actividade humana. O professor proporá situações que levem os estudantes a realizar actividades matemáticas: explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas e raciocinar logicamente. Ao realizar este tipo de actividades, cria-se o hábito de experimentar, tentar encontrar generalizações e procurar o que há de invariante numa situação. Se o estudante compreender que não basta que uma hipótese formulada se verifique em alguns casos para poder tomar essa hipótese como uma afirmação verdadeira, sendo necessário encontrar uma argumentação lógica para a validar ou um contra-exemplo para a rejeitar, então o estudante está a desenvolver aspectos essenciais da sua competência matemática. (Programa de Matemática dos Cursos Profissionais, 2004, p.5)

Pretende-se que o ensino da matemática nestes cursos privilegie:

> (…) o trabalho experimental e o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se coloquem questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais, recorrendo com frequência a ferramentas computacionais adequadas. (Programa de Matemática dos Cursos Profissionais, 2004, p.4).

Considera-se também o uso do computador obrigatório, e recomenda-se a utilização de Programas de Geometria Dinâmica.

No módulo de Geometria, em particular, as competências visadas incluem " a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia" e nos objectivos de aprendizagem incluem-se "a comunicação oral e por escrito de aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados".

É sugerido que "a exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos" e que "devem apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica) ". (Programa de Matemática dos Cursos Profissionais, 2004).

O programa da disciplina, no geral, e em particular o conteúdo de cada módulo (onde se inclui o módulo Geometria) não é claro no que se refere ao papel da demonstração, no entanto pensa-se que numa perspectiva de educação matemática e de compreensão da matemática como ciência a experiência matemática dos alunos englobe esta prática, sempre que se proporcione, no contexto da utilização de actividades de investigação em que pela natureza das próprias tarefas, os alunos são levados a formular conjecturas e "os alunos quando formulam conjecturas, devem argumentar em sua defesa e tentar demonstrá-las" (Veloso 1998, p.370) mesmo que nem sempre o consigam, se for visto como um "processo natural" decorrente das suas práticas.

As actividades de investigação, com explorações que levam à elaboração de conjecturas e consequente necessidade de demonstração de resultados desenvolvem nos alunos competências matemáticas, segundo Veloso (1998, p.370) "os alunos ficam a perceber melhor o que é a actividade dos matemáticos e como se constrói a matemática, quais são os processos próprios de justificação".

De uma forma geral, grande parte dos estudos no âmbito da tecnologia em educação matemática apontam então benefícios para a utilização das mesmas, em particular no que diz respeito aos AGD no ensino da geometria, favorecendo a compreensão da matemática enquanto ciência. O facto de a sua utilização ser integrada no currículo pode proporcionar aos alunos experiências matemáticas diversificadas e ricas promovendo ambientes de aprendizagem significativos.

Os alunos podem ficar mais capacitados para compreender e aplicar os seus conhecimentos de matemática, para criar hábitos de trabalho autónomo e criar expectativas positivas face à disciplina e ao sucesso na mesma, nomeadamente num tema que consideram difícil como é a Geometria.

Por outro lado criam-se condições propícias ao estudo da demonstração em matemática resultantes da aplicação de tarefas de investigação e exploração pelas características inerentes às mesmas.

MULTIPLAS PERSPECTIVAS DE DEMONSTRAÇÃO

Começando com os princípios e as normas em Matemática escolar e passando pelos currículos nacionais de Matemática, a demonstração surge como um dos aspectos importantes da disciplina permitindo criar um melhor entendimento dos resultados matemáticos dotando os alunos de ferramentas adequadas e deverá ser visto como um processo natural decorrente das suas práticas.

A utilização de AGD poderá ser um catalisador para o desenvolvimento destas competências: criar e desenvolver argumentos (conjecturas) e provas matemáticas (demonstração).

Torna-se, portanto, necessário proceder a uma análise sobre o papel da demonstração quando se utilizam AGD relacionando questões importantes como são as funções da demonstração, a visualização e o raciocínio espacial assim como aspectos relativos à motivação para o estudo da demonstração matemática salientando ainda questões recentes que se levantam resultantes da integração e utilização desta tecnologia no currículo.

A demonstração no ensino e aprendizagem da matemática e da geometria

Nas normas para a Matemática escolar (NCTM, 2000, p.61) sobre raciocínio e demonstração e considerando que este processo deve ser uma “parte consistente das experiências matemáticas dos alunos” indicam-se os seguintes objectivos:

- Reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da Matemática;

- Formular e investigar conjecturas matemáticas;

- Desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas;

- Seleccionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração.

Assume-se que os alunos deverão atingi-los ao longo dos diversos ciclos de ensino e de acordo com a sua maturidade intelectual, começando numa fase inicial por processos de argumentação simples (ao nível do pré-escolar e 1º ciclo) e evoluindo para processos devidamente organizados ao nível do ensino secundário, com base num conhecimento matemático consolidado durante o seu percurso escolar, sendo que chegados ao fim do ciclo de estudos (ensino secundário) estejam na posse de ferramentas que lhes permitam utilizar o processo demonstrativo para validar conjecturas, utilizando raciocínio dedutivo. Apontam ainda para que este processo seja resultado de um processo "natural" e não como uma imposição do professor por via do currículo.

O papel da demonstração no ensino da Matemática e nomeadamente no ensino da Geometria tem sido amplamente discutido por educadores e investigadores nas últimas duas décadas.

> Existe consenso geral sobre o facto do desenvolvimento do sentido de demonstração constituir um objectivo importante em educação matemática e parece existir uma tendência para a introdução da mesma nos currículos (Mariotti, 2006, p.197)

Sobre o ensino da demonstração, se por um lado alguns defendem que este se deve focar nos aspectos formais e ensinar os processos demonstrativos, segundo os métodos tradicionais, outros consideram que se pode agilizar o processo e enveredar mesmo por novos caminhos sugerindo que o processo demonstrativo pode ser encarado sob um ponto de vista menos formal, surgindo naturalmente pela experimentação e aceitando novos processos que conduzam a processos demonstrativos de um certo modo guiados pela introdução dos mesmos, sem prejuízo do que constitui demonstração em matemática.

Por outro lado, a demonstração em matemática, pode ainda assumir um papel mais abrangente no entendimento da matemática como Ciência, numa perspectiva da didáctica da Matemática:

> (…) os professores não se podem furtar de ajudar os alunos a experimentar e compreender as características da matemática como ciência, nomeadamente o papel da demonstração e das definições na sua construção (Veloso, 1998, p.360)

O facto de que toda a aprendizagem é mais significativa se for fruto de "iniciativa pessoal", parece ser aplicado ao ensino da demonstração em particular ao ensino da demonstração de propriedades geométricas.

> A dificuldade que os alunos têm em compreender a necessidade de demonstração é bem conhecida dos professores do ensino secundário e é identificada em toda a investigação em educação, sem excepção, como um dos maiores problemas no ensino da demonstração. (De Villiers 1999/2001, p.31)

Outros estudos corroboram que a introdução e o ensino da demonstração no contexto de sala de aula devem ser significativos para o aluno, como parte integrante do seu crescimento intelectual e da sua aprendizagem:

> A prova tem claramente o propósito de validação – confirmar a verdade de uma afirmação verificando a correcção lógica dos argumentos matemáticos – contudo, ao mesmo tempo, a prova tem que contribuir mais amplamente para a construção do conhecimento. Se não for este o caso, provavelmente permanecerá sem sentido e inútil aos olhos dos estudantes. Têm sido propostas abordagens alternativas há muito tempo e os ponto cruciais que emergiram de diferentes contribuições de investigações diz respeito à necessidade da prova ser aceite do ponto de vista matemático mas também de forma a fazer sentido para os alunos. (Mariotti, 2006, p.198)

Essencialmente a demonstração não pode surgir nas aulas de matemática como algo isolado, e sem sentido para os alunos, como um conjunto de regras impostas e formalismos associados sob pena de ser abandonado ao primeiro relance (pelos alunos):

> A demonstração não pode ser vista como um fim, mas sim como um meio muito rico de aprendizagem. A sua presença na sala de aula deve contribuir para o desenvolvimento da capacidade de demonstração matemática, que é aqui entendida como algo mais abrangente do que a produção de demonstrações matemáticas. (Machado, 2005, p.253)

Preferencialmente, a demonstração deve surgir como um processo natural decorrente da actividade dos alunos e não decorrente da autoridade do professor. Então, demonstrar deverá surgir para os alunos como forma de convencimento com base na razão utilizando um processo válido de justificação dos seus raciocínios.

A demonstração e a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica

Sendo os AGD um meio privilegiado para a realização de tarefas de investigação e exploração criam obrigatoriamente ambientes de aprendizagem em que a construção do conhecimento se faz de forma continuada e participada, de uma forma autónoma e que pode levar à utilização de argumentos mais ou menos formais como meio de convencimento.

Os alunos devem sentir a necessidade de demonstrar as suas conjecturas nomeadamente quando utilizam AGD:

> (…) Ironicamente, o caminho mais eficaz para engendrar o uso significativo da prova na geometria do ensino secundário é o de evitar uma prova formal para muito do trabalho dos alunos. Ao concentrar-se em vez de justificar ideias, ajudando os alunos a construírem os fundamentos visuais e empíricos para níveis mais elevados de pensamento geométrico, podemos levar os alunos a perceberem a necessidade de prova formal. Só então eles serão capazes de usá-lo de forma significativa como um mecanismo para justificar ideias. (Battista e Clements, 1995)

Vários investigadores (Hadas e Hershkowitz, 1998, 1999; Hoyles e Healy, 1999) consideram que a utilização de AGD abriu novas perspectivas no que diz respeito à introdução da argumentação informal como ligação à prova/demonstração formal (Mariotti, 2006, pp.173-204). A mesma investigadora afirma que o aluno tem que saber a diferença entre argumentação e demonstração sem rejeitar uma em favor da outra. Conclui ainda que a argumentação utilizada no ensino tem que ser conscienciosamente devolvida à aula de matemática, mas alcançar uma perspectiva teórica significa estar consciente da natureza particular da validação matemática, de modo a que as competências argumentativas que emergem naturalmente na interacção social possam parecer inadequadas e, por esta razão, sejam provavelmente ultrapassadas.

No entanto, alguns investigadores como por exemplo Hoyles e Healy (1998) apontam algumas preocupações referentes ao papel que a utilização dos AGD pode desempenhar no ensino da demonstração:

> (…) já há uma tendência notável para utilizar estas poderosas ferramentas dinâmicas de geometria, no sentido de reconhecer padrões, gerar casos, medir comprimentos e ângulos, simplesmente obter dados. Esta abordagem orientada para a recolha de dados, se não formos cuidadosos, permite-nos passar ao lado de todo o conteúdo matemático importante que o domínio geométrico é capaz de oferecer. Em particular, o caminho da demonstração como explicação ou verificação corre o risco de se tornar ainda mais problemático. (Hoyles e Healy, 1998, p.128)

Num estudo recente, Mariotti (2010, p. 231) refere que as propriedades que permanecem invariantes, quando se efectua uma construção utilizando um AGD, e que levam à elaboração de conjecturas, podem ser facilmente compreendidas. Acrescenta ainda que se por um lado esta facilidade para compreender tais propriedades podem inibir alguns processos de argumentação que conduzem à procura de elementos úteis para a construção da demonstração, por outro podem promover formas de pensamento e ajudar a ultrapassar algumas dificuldades de âmbito cognitivo que surgem quando os alunos pretendem efectuar conjecturas e demonstrações.

Por outro lado, a utilização dos AGD potencia o entendimento da Matemática como ciência, atribuindo-lhe uma componente experimental:

> (…) a geometria dinâmica transforma a matemática numa ciência laboratorial, que permite investigações de fenómenos interessantes e o papel dos alunos torna-se o de um cientista: observar, registar, manipular, predizer, conjecturar, testar e desenvolver teorias como explicações para os fenómenos (Olive *et al.*, 2003, p.17).

À primeira vista, e mesmo considerando algumas preocupações, os AGD aparentam ser um meio privilegiado para atingir um fim: a demonstração em matemática.

Devido às suas características e filosofias de funcionamento, os AGD como o GSP têm potencial para que os alunos efectuem pequenas investigações sendo induzidos à compreensão de teoremas e levados a construir demonstrações dedutivas, inferindo propriedades e efectuando generalizações (Christou, 2004, p.215)

Em estudos realizados, em Portugal, sobre a utilização de tecnologia em educação matemática, neste caso especificamente os AGD, as conclusões apontam também a importância dos processos que levam à demonstração:

> (…) A explicação das propriedades geométricas deverá, sobretudo, constituir algo que tenha significado para os alunos. Estes devem ser desafiados de modo sistemático a justificar as suas afirmações, aceitando-se que comecem por dar justificações visuais, baseadas em raciocínios empíricos, pois isso é fundamental para atingirem níveis mais elevados de pensamento geométrico (Junqueira e Valente, 1997, p.45).

Os alunos devem entender o processo de demonstração como forma de justificação formal de raciocínio e reconhecer as etapas que o constituem como um processo de dedução rigorosa, de conclusões a partir de hipóteses inicialmente formuladas.

> Numa perspectiva construtivista da aprendizagem, o processo pelo qual os alunos constroem a prova tem uma importância vital. Actualmente, na

> aprendizagem da Geometria encaram-se os processos de natureza indutiva como fundamentais: os aspectos intuitivos da (re) descoberta e da posterior generalização da conjectura são passos indispensáveis para uma subsequente construção da prova dedutiva. (Coelho e Saraiva 2000, p.38)

A utilização de AGD, pelas suas características de facilidade de exploração permitindo gerar e explorar um grande número de exemplos num curto espaço de tempo pode ser potenciador da aprendizagem da demonstração:

> (…) Várias investigações mostram que a interacção com AGD pode ajudar os alunos a explorar, conjecturar, construir e explicar relações geométricas. Podem mesmo fornecer-lhes as bases para construir demonstrações dedutivas. (Jones, 2005, p.29)

Funções da demonstração

De Villiers (1999/2001) identifica cinco funções da demonstração matemática no trabalho com o GSP: "verificação/convencimento (dizendo respeito à verdade da afirmação), explicação (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira), descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados), sistematização (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas), comunicação (a transmissão do conhecimento matemático) e desafio intelectual (a realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração)." Desvaloriza e sugere que se elimine o processo de verificação, reservando-o para situações em que os alunos revelem "dúvidas genuínas":

> Quando os alunos já investigaram com cuidado uma conjectura geométrica por meio de uma variação contínua, com um *software* como o *Sketchpad*, têm pouca necessidade de adquirir maior convicção ou de proceder à sua verificação (De Villiers, 1999/2001, p.35)

E sugere um modelo para que os alunos sejam iniciados nas várias funções da demonstração, pela seguinte ordem: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização, embora o possam fazer:

> … Não de uma forma estritamente linear mas, numa espécie de espiral em que funções já introduzidas são retomadas e ampliadas. (De Villiers, 1999/2001, p.35)

O trabalho desenvolvido com alunos, com a utilização de AGD aponta para o papel importante que a experimentação pode ter na elaboração de conjecturas na perspectiva de validação (ou não) das mesmas através da prova (ou contra-exemplos).

> Em vez da demonstração que é apresentada como um produto acabado, De Villiers (1997) propõe a demonstração como uma parte da actividade matemática que os alunos devem experimentar, e argumenta que os programas de geometria dinâmica são recursos adequados a esta actividade: apresentar aos alunos a função fundamental da demonstração como explicação e descoberta exige que desde muito cedo eles sejam iniciados na arte de formular problemas e que lhes sejam proporcionadas oportunidades suficientes de exploração, conjectura, refutação, reformulação e explicação (…). Os programas de geometria dinâmica encorajam fortemente este tipo de raciocínio. Eles são poderosos como meio de verificação de conjecturas verdadeiros e também muito valiosos na construção de contra-exemplos para conjecturas falsas. (Loureiro e Bastos, 2000, p.123)

Pelo facto dos AGD permitirem gerar um grande número de exemplos num curto espaço de tempo, que permitem a investigação de propriedades que resistem aos arrastamentos “a procura de tudo o que permanece constante, no meio de tudo o que varia” (Veloso, 1998) a demonstração surge mais como um processo de busca do porquê da veracidade de uma determinada conclusão e menos do seu convencimento (Coelho e Saraiva, 2000). Indo de encontro à opinião de De Villiers descrita anteriormente, que a demonstração não seja apresentada como um produto acabado sendo parte da actividade matemática dos alunos, os AGD favorecem a experimentação e permitem criar oportunidades de conjecturar, argumentar e explicar, desenvolvendo raciocínios:

> (…) os estudantes desenvolvem conjecturas baseadas na experiência, tentam justificá-las, desenvolvem novas experiências na base do que tinham aprendido e depois refinam as suas conjecturas. Este ponto de vista envolvendo “hábitos de pensar” atira a tecnologia para um novo papel. Esta tecnologia permite o desenvolvimento de actividades que põem poder experimental nas mãos de estudantes e professores. O foco pode ser em factos (teoremas) descobertos ou em formas de pensar que conduzem à descoberta ou à compreensão de factos e ao saber que eles são factos. [aspas no original] (Costa, 2000, pp.162-163)

De Villiers (2003, pp.174-185) dá alguma ênfase ao papel da experimentação e afirma que “é simplesmente intelectualmente desonesto fingir na sala de aula que a convicção só surge do raciocínio dedutivo ou que os adultos matemáticos nunca investigam experimentalmente conjecturas e resultados já demonstrados. Para quê negar aos alunos a oportunidade de explorar conjecturas e resultados experimentais quando nós, matemáticos adultos o fazemos tantas vezes nas nossas próprias investigações." Acrescenta ainda que "estes resultados experimentais podem ajudar os alunos a compreender melhor o significado proposicional de um teorema".

O processo de demonstração por contra-exemplo aparece referido em vários estudos (Veloso, 1998; De Villiers, 2001; Machado, 2005) e surge como um dos processos que os alunos "escolhem" mais vezes, decorrentes das suas experiências e na sequência da tentativa de justificação das suas conjecturas.

Christou (2004, p.221-222), num estudo efectuado com alunos, analisando as estratégias que utilizaram na resolução de um problema com quadriláteros (que o levou a concluir que um AGD aliado a questões e tarefas apropriadas motivou os alunos para a procura de justificações para as suas conjecturas) refere que os alunos quando utilizam AGD como o GSP passam por três fases: a primeira uma fase pré-demonstração, em que os alunos exploram os problemas apresentados – exploração, que deverá conduzir à elaboração de conjecturas por visualização das transformações ocorridas decorrentes da ferramenta de "arrastamento" de que o *software* dispõe; a fase da demonstração em que os alunos fazem a transição entre geometria "exploratória" (a que utilizam com o GSP) e geometria dedutiva em que devem apresentar argumentos dedutivos como tentativas de explicação e não de verificação e uma terceira fase, de desafio intelectual em que estendem o processo de demonstração a problemas semelhantes (generalização). Ainda no mesmo estudo conclui que as medições serviram para procurar explicações e um meio de recolha de informação para justificar os seus resultados, contribuindo para a explicação de conjecturas aliadas à constatação das propriedades que permaneciam invariantes. Acrescenta ainda que tais medições forneceram também a base para elaboração de conjecturas e generalizações.

O modo como a demonstração é apresentada aos alunos contribuirá largamente para a sua aceitação. Num estudo realizado com alunos do 8º ano sobre a demonstração matemática no contexto de utilização do GSP, Machado (2005, p.49) sugere um percurso que poderá ser seguido também neste estudo:

> (…) uma forma dos alunos chegarem à demonstração pode passar pelo seguinte percurso:

- desenvolvem a sua actividade a partir de uma tarefa suficientemente aberta que permita a formulação de conjecturas;
- perante a análise da situação apresentada os alunos vão gerar exemplos;
- vão organizar e analisar esses exemplos, comparando-os uns com os outros (procurando regularidades) ou com algum ponto de partida (procurando relações);
- a partir desta observação formulam-se conjecturas;
- vão-se testar essas conjecturas a partir de exemplos, tentando encontrar um contra-exemplo;

  (a) o contra-exemplo é encontrado e a conjectura é reformulada ou abandonada e tentam-se formular novas conjecturas;

  (b) a conjectura resiste a vários testes, há então a necessidade de partir para a sua demonstração.

Um percurso como o apresentado anteriormente vai de encontro ao que referem outros investigadores, como Takáč (2009):

> Os professores podem tratar a explicação da demonstração diversificadamente. Podem atribuir importâncias variadas aos aspectos reais e aos aspectos formais da demonstração. A importância de cada aspecto depende de objectivos pedagógicos: 1. Aspecto real ("objectivos matemáticos") – desenvolvendo o conhecimento matemático dos alunos: propriedades dos objectos matemáticos e relações entre os objectos, 2. Aspecto formal ("objectivos lógicos") – desenvolvendo nos alunos capacidades de raciocínio: uso de conectivos lógicos, os quantificadores, a linguagem formal e os métodos de demonstração (Takáč, 2009, p.202)

Motivação para a demonstração

Outros estudos estão ligados à questão da motivação (Hull e Brovey, 2004, p.7) e procuram saber se as atitudes dos alunos face à Matemática são modificadas pela utilização dos AGD concluindo que o interesse e participação dos mesmos em Geometria melhoraram com a utilização deste tipo de *software* e que estes parecem mais convencidos sobre a veracidade de um teorema, levados por este tipo de exploração.

Na mesma perspectiva (a da motivação) mas de um modo mais abrangente, outro estudo refere mesmo a utilização de "tarefas para motivação para o raciocínio e demonstração" (Takáč, 2009). Recomenda que a demonstração não seja logo introduzida num patamar muito elevado relativamente aos aspectos formais, sob pena dos alunos desenvolverem antipatia pela mesma, e que seja utilizada de acordo com o ano que os alunos frequentam e as capacidades mentais que possuem. Segundo o mesmo estudo:

> (…) a motivação para a demonstração pode ser dividida nos seguintes aspectos:
>
> 1. alguém que se quer convencer-se a si próprio sobre a veracidade de uma afirmação;
>
> 2. alguém que quer convencer outro(s) da veracidade de uma afirmação;
>
> 3. o professor (atribuição de tarefas) exige a demonstração de uma afirmação.
>
> Sendo os dois primeiros pontos motivações de natureza intrínseca: o primeiro é a melhor condição prévia para desenvolver nos alunos capacidades de procurar logicamente argumentos correctos, o segundo para desenvolver capacidades verbais e definir com maior precisão a criação de argumentos (comunicação) e o terceiro de natureza extrínseca, considerando que são os dois primeiros pontos que, quando juntos, conduzem à criação de demonstrações correctas. (Takáč, 2009, p.203).

O estudo conclui que a realização de tarefas do tipo apresentado desenvolve a motivação intrínseca para a demonstração sendo o primeiro passo para a criação de demonstrações correctas e desenvolvimento do pensamento crítico. Reconhece ainda que o papel do professor será o de escolher o grau de formalidade associado à demonstração (aspecto real ou aspecto formal) e ainda escolher o papel da demonstração numa actividade educacional (tarefas).

Outras questões de investigação que emergem decorrentes da utilização de ambientes de geometria dinâmica – a actualidade internacional

A introdução da utilização dos AGD em educação matemática e no ensino da geometria como ferramenta em contexto de sala de aula, constando em muitos países como recomendação (o caso de Portugal) e noutros como obrigatoriedade (Reino Unido e USA por exemplo), a integração e utilização de um *software* deste tipo no currículo, levantou novas questões sobre o que constitui demonstração em geometria dinâmica:

> Balacheff (2008) identifica uma gama de diferentes interpretações para esta questão, que relaciona com diferenças em epistemologia matemática e, pode argumentar-se ontologia. Procura uma terminologia comum que estende estas interpretações, impulsionando este campo. Juntamente

> com esta está outra questão, a do papel das tecnologias digitais neste processo: as tecnologias potenciam um processo que é conhecido ou mediam um novo tipo de conhecimento?" (Stevenson 2009, p.188)

Estas questões, da análise da noção de demonstração identificada por Balacheff (2008, pp.501-512) e da análise do papel das tecnologias digitais e o contexto em que são utilizadas continuam a ser alvo de estudos recentes por se revelarem promissoras do ponto de vista da investigação.

Baccaglini-Frank e Mariotti (2010, pp.231-240) distinguem entre o que consideram conjectura estática, no caso das que são elaboradas por resultado de tarefas de papel e lápis e outras que denomina de conjectura dinâmica, resultado do trabalho efectuado com AGD e concluem que " por um lado a facilidade de entendimento de certas invariantes parece inibir alguns processos argumentativos que conduzem ao encontro de elementos fundamentais para a construção da prova, por outro lado, a investigação tem mostrado que ajuda a ultrapassar algumas dificuldades cognitivas que os alunos enfrentam quando efectuam conjecturas e provas" num trabalho sobre a elaboração sobre hipóteses de pesquisa e levantam outras questões no campo da investigação em geometria dinâmica e do papel da conjectura e prova quando se utilizam AGD:

- Que formas de raciocínio (abdutivo, dedutivo, …) são actualmente utilizadas (e como) durante a fase de conjectura num problema aberto em AGD?
- Como é que um AGD contribui para o desenvolvimento da demonstração de uma conjectura?

Os autores consideram ainda poder ser interessante analisar os processos de raciocínio utilizados durante a fase de conjectura nos casos em que existe demonstração e nos casos em que os sujeitos se ficam apenas pela conjectura comparando-os.

Como já se referiu, o papel da demonstração em educação matemática, em especial o papel da demonstração em geometria, à luz das novas ferramentas de aprendizagem é um domínio rico em investigação matemática e todos os contributos (como este estudo o pretende ser) poderão ser significativos.

Há ainda que considerar o aspecto da visualização que se torna fundamental na resolução de problemas envolvendo raciocínio espacial e apresenta-se como "a capacidade para representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e reflectir sobre a informação visual" (Hershkowitz, 1989).

A integração destas ferramentas no currículo coloca então algumas questões sobre o que constitui demonstração quando se utilizam AGD, nomeadamente no que diz respeito à visualização. O facto de se poderem construir objectos geométricos com uma grande precisão ajuda os alunos a entender o significado dos conceitos teóricos mas pode levar a que facilmente confundam entre o que é experimentação e demonstração (Hanna, 2000, p.84). O facto de os AGD favorecerem a elaboração de conjecturas e o teste das mesmas de uma forma rápida e eficiente, devido às suas características, nomeadamente da ferramenta de arrastamento deve ser um meio para chegar ao fim que é o de um processo demonstrativo através de um raciocínio dedutivo utilizando a experimentação ao serviço da demonstração.

A visualização teve sempre um papel importante desde a Antiguidade mas, com o aparecimento dos AGD, assume um novo papel. Hanna (2000, p.91) refere a preocupação de outros investigadores em perceber se a visualização pode ser utilizada não só como uma evidência para um resultado matemático mas também como justificação concluindo que até à data as representações visuais não eram aceites como substitutos da prova mas que tal facto se considerava controverso e continuava a ser investigado. A questão que coloca é a "de que forma se pode extrair a informação implícita numa representação visual de tal modo que sustente uma demonstração válida".

Um AGD como o *Geometer's Sketchpad*, pode "mostrar" que uma determinada propriedade é verdadeira ou parece ser verdadeira mas não justifica porque é que é verdadeira e como tal não pode ser considerada uma prova ainda que este processo de visualização que os AGD fornecem possa ser entendido como um pré-requisito dessa mesma prova.

Em suma, questões como o tipo de justificação que pode ser aceite como prova, o tipo de raciocínio utilizado na elaboração de conjecturas e a forma efectiva de como os AGD contribuem para a construção de processos demonstrativos são questões actuais de investigação levantadas pela emergência da integração das tecnologias nos currículos de matemática e para as quais este estudo pretende ser um contributo.

De uma forma abreviada e, a partir do trabalho revisto dos vários investigadores, a utilização dos AGD no ensino da geometria traz grandes benefícios quando associado a tarefas de investigação e exploração, promovendo um ambiente de aprendizagem rico quando conjugado com a realização de tarefas de investigação e exploração. Estimula os alunos a apresentar justificações e argumentos para os seus resultados contribuindo desta forma para um melhor entendimento dos conceitos e teorias, podendo favorecer o raciocínio dedutivo e contribuindo para um melhor entendimento da matemática enquanto ciência.

CAPÍTULO III - Metodologia

OPÇÕES DE METODOLOGIA

O foco deste estudo será o tipo de aprendizagens dos alunos no estudo de propriedades das pavimentações e a motivação para a sua aprendizagem, assim como a motivação para a demonstração e elaboração de conjecturas. Deste modo, a metodologia a adoptar será de natureza qualitativa, frequentemente utilizado em educação.

> Uma das vantagens da investigação de natureza qualitativa relaciona-se com a possibilidade que abre de gerar boas hipóteses de investigação. Isto deriva do facto de se utilizarem técnicas tais como *entrevistas detalhadas* e *profundas* com os sujeitos sob investigação, *observações minuciosas* e *prolongadas* das suas actividades e/ou comportamentos e *análise* de produtos escritos (e.g., relatórios, testes, composições).
>
> A investigação qualitativa fornece informação acerca do ensino e da aprendizagem que de outra forma não se pode obter. Por exemplo, através de observação detalhada e planeada e de interacção estreita com os sujeitos podem estudar-se os processos cognitivos que utilizam na resolução de situações problemáticas. Podem assim identificar-se variáveis relevantes para o estudo do ensino e da aprendizagem que não são facilmente detectadas através da utilização de métodos típicos da investigação quantitativa. (Fernandes, 1991, p.4)

A decisão de optar por este tipo de metodologia em primeiro lugar tem a ver com o facto da fonte directa de dados ser o ambiente natural e a investigadora, a responsável pela recolha dos mesmos. Por outro lado, e como já foi referido, interessa estudar os processos utilizados pelos alunos e analisar os dados de forma indutiva (Bogdan e Biklen, 1994).

Pretende-se observar para, entre outras questões, compreender o fenómeno e identificar elementos que depois poderão ser abordados nas entrevistas, se relevantes. O registo das observações será efectuado através de notas de campo contendo factos, opiniões e interpretações e serão descritivas contendo o discurso dos participantes e as ideias da professora que desempenha em simultâneo o papel de observadora e investigadora constituindo por isso uma observação participante.

Os dados recolhidos serão descritos e interpretados de acordo com o modo como foram registados num contexto natural de sala de aula uma vez que todos os pormenores podem contribuir para uma melhor compreensão dos objectos do estudo.

A professora/investigadora será a responsável pela recolha de dados quer através da observação directa e de pequenas conversas de carácter informal decorrentes da aplicação das tarefas produzidas e propostas, quer da recolha de documentos escritos, de fotografias e do registo dos *sketches* produzidos pelos alunos em cada tarefa.

Mais à frente neste capítulo apresentar-se-á uma descrição pormenorizada de cada tarefa produzida e testada. As tarefas foram elaboradas pela professora/investigadora com vista à realização deste estudo. São tarefas de investigação e exploração no âmbito do estudo das pavimentações regulares e semi-regulares, que envolvem a construção de *sketches*, algumas orientadas e outras de resposta aberta, com perguntas relacionadas com resultados algébricos referentes às propriedades das pavimentações.

A descrição do resultado da aplicação destas tarefas é o que constará no processo de recolha e análise de dados ainda neste capítulo. As notas de campo dirão respeito à observação deste processo:

> O relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo (Bogdan e Bilken, 1994, p.150)

Para além disso as notas de campo apoiarão a professora/ investigadora no acompanhamento do desenvolvimento do estudo.

Após a recolha e processamento dos dados e análise das notas de campo estes serão analisados procurando responder às questões do estudo, essencialmente como e que aprendizagens os alunos desenvolveram com a utilização de um AGD no estudo do tema pavimentações contribuindo para um melhor entendimento sobre o contributo que este software pode fornecer no ensino da Geometria.

Assim, o *design* de investigação escolhido para este estudo é o de um estudo de caso: procuram encontrar-se interacções, descrever e analisar um fenómeno no seu ambiente natural utilizando diversos meios de recolha de dados, procurando compreendê-lo melhor.

Num estudo de caso de características qualitativas, estuda-se de modo intensivo uma situação:

> Um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês" evidenciando a sua unidade e identidade próprias. É uma investigação que se assume como particularista, isto é, debruça-se deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico. (Ponte, 1994, p.3)

Ao optar por esta abordagem metodológica pretende-se compreender mais claramente os resultados obtidos, captando as características únicas do caso, procurando criar condições para a compreensão de outros casos.

Este estudo reúne as características principais de um estudo de caso: utiliza uma descrição pormenorizada e cronológica dos acontecimentos relevantes para o caso, articula análise e descrição dos acontecimentos e evidencia os acontecimentos específicos mais relevantes para o caso tendo sido por isso a opção metodológica naturalmente tomada.

PARTICIPANTES

De um modo geral, os alunos dos Cursos Profissionais não estão predispostos para a prática da demonstração, nem compreendem o seu papel, considerando que a Matemática é difícil e que os resultados que lhes são apresentados pelos professores são resultados saídos da cabeça de outros que só lhes dão trabalho. Os alunos destes cursos ingressam numa via profissionalizante por um método de "selecção natural": os alunos com bom desempenho escolar ingressam nos cursos de prosseguimentos de estudos (Cursos Científico - Humanísticos) e os alunos com aproveitamento mais fraco enveredam nestes. Poucos são os casos de alunos empenhados e que vêm a Matemática, e em particular a geometria, com agrado.

A escola onde foi aplicado este estudo pertence ao distrito de Setúbal, concelho do Barreiro com uma boa localização, numa área residencial. Tem turmas do 7ºano ao 12º ano de escolaridade, cursos CEF e cursos Profissionais. A maior parte dos alunos ingressa na escola no 7º ano e tende a prosseguir estudos. A escola tem problemas graves de indisciplina ao nível do ensino básico e casos pontuais nos restantes anos de escolaridade. De um modo geral os alunos não estão motivados para a frequência do ensino, fazem-nos porque são "obrigados".

A turma escolhida para participar no estudo é uma turma do 10º ano de escolaridade, com vinte e três alunos do Curso Profissional de Técnico de Design Gráfico. Os alunos desta turma são de maneira geral provenientes de classes sociais baixas, com baixas expectativas relativamente ao seu desempenho e com atitudes pré-concebidas relativamente à disciplina (é difícil, não percebem, não gostam).

A escolha desta turma foi intencional, constituindo assim uma amostra por conveniência (Bravo, 1998) e prende-se com vários factores: por um lado tendo em conta os interesses da professora/investigadora nesta área de investigação (Tecnologias em Educação Matemática, neste caso especificamente a utilização de AGD como o GSP), por outro lado pela possibilidade da gestão do currículo ser mais flexível nestes cursos e estes alunos em particular, revelarem algumas capacidades em realizar trabalho de uma forma autónoma, e ainda pelo facto do tema a trabalhar (as pavimentações) poder ser estimulante do ponto de vista do curso que frequentam; por outro lado pela pretensão de tentar perceber as suas atitudes relativamente à necessidade de efectuar demonstrações, o processo que utilizam para elaborar conjecturas, por serem alunos normalmente com dificuldades em expressar-se utilizando linguagem formal (no caso desta disciplina) e ainda no intuito de verificar se as suas atitudes face à Matemática e em particular à Geometria se modificam com a utilizam do GSP.

Uma vez que este estudo é de natureza qualitativa, não houve preocupação com a dimensão da amostra. A escolha dos grupos que foram estudados foi criteriosa no sentido de garantir a exequibilidade do estudo, são grupos de alunos responsáveis e habitualmente cumpridores com as tarefas em contexto da sala de aula. Embora as tarefas tenham sido aplicadas no grupo turma foram escolhidos apenas três grupos (pares) para integrarem este estudo.

Sendo a investigadora a professora foi, como já se referiu, a principal agente de recolha de dados através do registo de notas de campo resultado da observação directa e da interacção com os alunos através de conversas informais, sendo uma vantagem a boa relação estabelecida com os alunos desde o início do ano lectivo, permitindo um maior conhecimento da investigadora sobre os participantes no estudo (alunos).

CARACTERIZAÇÃO DA TURMA

A turma do 10º Ano, do curso profissional de Design Gráfico, a que se refere este estudo é constituída por 23 alunos, sendo 15 raparigas e 8 rapazes com média de idades 16 anos. Destes alunos, 15 têm nacionalidade portuguesa, 5 cabo-verdiana e ainda um aluno brasileiro e uma aluna ucraniana.

Muitos destes alunos vêm de meios económico sociais desfavorecidos, com agregados familiares reduzidos: há muitos com famílias disfuncionais e a viver com outras pessoas que não os pais. Mais de metade dos alunos (14) são beneficiários da Acção Social Escolar.

Relativamente à sua situação escolar, são alunos com algumas dificuldades em termos de aprendizagem: apenas 4 alunos nunca reprovaram durante o seu percurso escolar, 6 reprovaram 1 vez no ensino básico, 5 alunos reprovaram duas vezes e 4 alunos reprovaram 3 vezes no mesmo ciclo de ensino; 3 alunos reprovaram no ensino secundário e transitaram dos Cursos Cientifico Humanísticos para o Curso Profissional.

Quase metade dos alunos (10) afirma que gosta de estudar embora o seu desempenho seja fraco e pretendem prosseguir estudos, alguns apenas até ao 12º Ano, outros pretendem mesmo ingressar no Ensino Superior.

São alunos que gostam de trabalhar em grupo, de actividades exploratórias e de investigação e que, de um modo geral, se envolvem com empenho nas tarefas propostas nas aulas. Antes da realização do estudo já tinha tido oportunidade de trabalhar em grupo em durante a leccionação do módulo de Estatística e portanto estavam familiarizados com a metodologia do trabalho de grupo.

A carga horária lectiva nesta turma para a disciplina de Matemática é de 90 minutos semanais, leccionados numa única aula, à segunda-feira das 08:30 às 10:00. A investigação decorreu exclusivamente durante as aulas previstas para a turma, não tendo sido utilizados tempos extra com excepção do tempo dedicado à resposta dos questionários aos alunos.

CARACTERIZAÇÃO DOS GRUPOS

Constituição e Características

Por uma questão de gestão dos equipamentos (o Laboratório de Matemática só dispõe de 11 computadores) foi solicitado que, para a realização das tarefas, os alunos se organizassem em grupos, neste caso pares, no sentido de optimizar os recursos existentes. Como a turma tinha alunos em número ímpar foi permitido um grupo com 3 alunos que no entanto não participou neste estudo.

Os alunos que constituem os grupos foram escolhidos pela professora/investigadora por serem alunos que apresentavam características de empenho, e principalmente por permitirem a viabilidade deste estudo, garantindo o cumprimento das tarefas propostas.

A formação dos grupos foi da responsabilidade dos alunos e só após esta formação foram escolhidos os grupos que constituem os casos.

Como já se referiu anteriormente, os grupos escolhidos são alunos participativos, e de um modo geral, motivados e empenhados na realização das tarefas em sala de aula ainda que não sejam todos alunos com um bom desempenho/sucesso à disciplina. Será feita uma caracterização pormenorizada sobre cada grupo em seguida.

De uma maneira geral, são todos alunos bem-dispostos, que gostam de frequentar a escola, com boas relações entre pares e que estão motivados para a frequência do curso profissional onde estão integrados uma vez que ingressaram no mesmo por "vocação". Alguns destes alunos têm aspirações ao nível do prosseguimento de estudos para o Ensino Superior.

Grupo A[1]

O grupo A é constituído por dois alunos de nacionalidade portuguesa, uma rapariga e um rapaz: a Ana e o Marco.

A Ana nunca reprovou e transitou do curso de Ciências e Tecnologias para o Curso Profissional, por sua escolha, frequentou o 10º ano do Curso de Ciências e Tecnologias e mudou de curso por não se identificar com as disciplinas do curso. Frequentou a disciplina de Matemática A no ano lectivo anterior, desistindo a meio do ano lectivo. O Marco nunca

[1] Os nomes de todos os alunos em estudo são nomes reais

reprovou e ingressou pela primeira vez no ensino secundário neste curso profissional por opção própria/vocação.

A Ana é muito extrovertida e participativa, empenhada nas tarefas mas com alguma preguiça em realizar tarefas mais teóricas. É a melhor aluna da turma em todas as disciplinas. O Marco é um aluno mais introvertido, no entanto colabora activamente na realização das tarefas do grupo com sugestões embora na sua participação quase passe despercebido. É um aluno com desempenho médio à disciplina de Matemática e às restantes disciplinas, muito atento e trabalhador. A Ana é uma jovem com interesses na área da música e com um bom nível intelectual e cultural. O Marco é desportista federado, pratica futebol e é um jovem bastante disciplinado.

De um modo geral é a Ana que dirige os trabalhos e que contribui mais activamente no grupo. A Ana desde o início do ano que brinca com o facto de não gostar de Matemática, di-lo muitas vezes, mais em atitude provocatória, de brincadeira.

Quer a Ana quer o Marco querem prosseguir estudos (para o ensino superior) e portanto empenham-se de modo a poderem obter os melhores resultados possíveis em todas as disciplinas. São alunos assíduos, no entanto a Ana chega às aulas muitas vezes atrasada, mora longe e tem alguns problemas com o transporte.

A Ana já tinha tido contacto com o GSP durante a frequência do 9º ano, diz que realizou algumas actividades em sala de aula mas não se lembrava de quase nada. O Marco não conhecia o programa mas como são ambos alunos curiosos e empenhados rapidamente conseguiram o domínio das ferramentas e dos menus do *software*. Inicialmente, a Ana assumiu o controlo da construção dos *sketches* tarefa que depois delegou no Marco.

Os alunos estão habituados a trabalhar como par, mesmo nas outras disciplinas, têm uma boa dinâmica de grupo desempenhando cada um as suas tarefas embora, como já se referiu, a Ana domine sempre no que diz respeito à participação e orientação dos trabalhos.

A Ana é persistente na realização das tarefas e solicita poucas vezes ajuda à professora/investigadora, assumindo a sua concretização quase como ponto de honra. Normalmente quem coloca questões é o Marco quase sempre sobre contra vontade da Ana.

A Ana tem um excelente desempenho na disciplina de Geometria Descritiva (tem classificação 20 valores em todos os módulos) e o Marco um desempenho médio (15 valores). Ambos gostam da disciplina de Geometria Descritiva.

Grupo B

O grupo B é constituído por duas alunas: uma de nacionalidade portuguesa, a Neuza e a outra cabo-verdiana, a Mélanie. A Mélanie vive em Portugal há 15 anos e fala e compreende perfeitamente a língua, não sendo este um entrave há compreensão e interpretação das tarefas.

As duas alunas apresentam características muito semelhantes: têm um desempenho médio à disciplina de Matemática, são empenhadas e cumpridoras das tarefas propostas, contribuem de igual modo na realização das tarefas não existindo nenhuma que monopoliza a realização das mesmas.

São duas alunas calmas e bem-dispostas, assíduas e pontuais e que participam sempre com empenho nas tarefas que lhes são propostas apesar de por vezes serem um pouco preguiçosas quando as tarefas envolvem muitos conceitos teóricos.

Nenhuma destas alunas tem pretensões a prosseguimento de estudos, pretendem acabar o 12º ano e ingressar no mercado de trabalho dentro da área do Design. Frequentam o Ensino Secundário pela primeira vez e o curso de técnico de Design Gráfico por opção/vocação.

Nenhum das alunas teve qualquer contacto com o GSP antes da realização destas tarefas. No entanto são alunas com algum à vontade no que respeita à utilização do computador e rapidamente identificam os menus e as ferramentas a utilizar, têm dúvidas apenas em algumas questões pontuais (respeitantes por exemplo a medições). Partilharam sempre a construção dos *sketches* relativa às tarefas propostas.

As alunas questionam muitas vezes a professora/investigadora quando têm dúvidas (o que aconteceu algumas vezes) e são persistentes na concretização das tarefas propostas. Algumas das vezes também questionam os outros colegas de outros grupos em vez de questionarem a professora/investigadora directamente.

Têm uma boa dinâmica de grupo, em termos de contribuição para o grupo fazem-no na mesma medida mas, por norma, é a Mélanie o elemento forte e é esta aluna que gere os trabalhos a maior parte das vezes.

A Mélanie tem um bom desempenho na disciplina de Geometria Descritiva (18 valores) e a Neuza um desempenho razoável (13 valores).

Grupo C

O grupo C é constituído por duas alunas, uma de nacionalidade portuguesa e a outra ucraniana. A aluna ucraniana fala e compreende a língua portuguesa sem grandes dificuldades, vive em Portugal há já algum tempo. Quando tem alguma dúvida sobre vocabulário questiona a professora/investigadora ou recorre à ajuda da sua colega de grupo/par.

A Daniela frequentou o 10º ano do Curso de Ciências e Tecnologias e decidiu mudar de curso por não se identificar com o curso que frequentava. A Yulia frequenta o Ensino Secundário pela primeira vez. As duas alunas frequentam o Curso de Design Gráfico por opção/vocação.

Quer a Daniela quer a Yulia são alunas bem-dispostas e participativas, empenhadas no trabalho em aula e persistentes no cumprimento das tarefas. Na realização das tarefas em grupo no módulo anterior eram sempre as primeiras a terminá-las com sucesso. Só brincam e conversam quando têm as tarefas terminadas, têm claramente bem definidas as suas prioridades. Estas duas alunas são as mais assíduas e pontuais do grupo turma. Têm um desempenho médio/bom na disciplina de Matemática.

Em termos de trabalho em sala de aula e como par têm um comportamento muito semelhante ao do grupo B: revelam uma boa dinâmica de grupo, são empenhadas na realização das tarefas e cumpridoras do que é solicitado. Nenhuma destas alunas se destaca como elemento dominante do grupo, contribuem da mesma forma na elaboração das tarefas e gerem os trabalhos em consonância de um modo natural.

Nenhum das alunas teve qualquer contacto com o GSP antes da realização das tarefas mas, há semelhança das alunas do grupo B, têm bastante à vontade na utilização do computador e rapidamente dominam as ferramentas e menus do *software*. Quando têm alguma dúvida questionam a professora/investigadora ou recorrem à ajuda dos colegas dos outros grupos. Ambas têm um desempenho médio (13/14 valores) na disciplina de Geometria Descritiva no entanto reconhecem que é muito resultado do seu investimento pessoal no estudo pois consideram que é uma disciplina difícil e como tal estudam bastante para ultrapassar as suas dificuldades.

TAREFAS E PRÁTICA LECTIVA

A generalidade dos alunos não conhecia o programa *Geometer's Sketchpad* (apenas três alunos tinham tido contacto prévio em aulas de Matemática no 9ºano) e foi necessário proceder a algumas explicações relativamente a comandos e filosofia do *software*.

Assim, no início desta investigação foi utilizada uma aula de 90 minutos em que, com o apoio do Quadro Interactivo, a professora/investigadora procedeu à explicação dos comandos básicos: construção de segmentos de recta, rectas e circunferências, rotações, translações e medições.

Nas restantes aulas foi disponibilizado um guião para o *software*, elaborado pela Associação de Professores de Matemática mas ao qual nenhum dos alunos, que fazem parte do estudo, sentiu necessidade de recorrer.

Foram elaboradas tarefas de introdução ao GSP que foram aplicadas antes das tarefas específicas sobre pavimentações.

Depois da aula de introdução referida anteriormente houve lugar à primeira tarefa, a que se designou tarefa introdutória. Esta tarefa (anexo 1) tinha como objectivo principal que os alunos se familiarizassem com o programa, percebendo o seu funcionamento, e ao mesmo tempo fossem conseguindo obter alguns resultados e relembrando conceitos que deveriam ter consolidado no ensino básico, relativos ao estudo dos polígonos regulares. Por outro lado pretendia também que se fossem familiarizando com a linguagem (conjectura e demonstração) que se pretendia ser usual nas aulas seguintes. Ao mesmo tempo queria colocar à prova os conhecimentos dos alunos em termos de algumas noções básicas de propriedades da Geometria, uma vez que eram necessárias para a construção de polígonos regulares como o pentágono. Não foi dada nenhuma indicação, a nenhum dos grupos em estudo, de como deveriam construir os polígonos, para além das explicações na primeira aula relativas aos comandos/ferramentas do GSP.

De um modo geral todos os grupos conseguiram realizar as tarefas introdutórias por tentativa e erro apesar de ter existido alguma ajuda entre grupos e, muito em parte devido aos conhecimentos que têm da disciplina de Geometria Descritiva que faz parte do currículo do Curso Profissional que frequentam. Alguns dos grupos também fizeram pesquisas na Internet (todos os computadores dispõem de ligação), no sentido de procurarem respostas a algumas das dúvidas que iam surgindo. As observações relativas a esta aula serão discutidas mais à frente neste capítulo.

As tarefas seguintes foram elaboradas tendo em conta os objectivos deste estudo e foram construídas segundo diferentes abordagens. O denominador comum a todas as tarefas é o facto de não condicionarem a obter resultados directamente relacionados com o estudo das isometrias nas pavimentações. Não foi uma opção intencional, surgiu naturalmente, enveredar pela investigação relativa a resultados algébricos, relativamente ao estudo das pavimentações, talvez condicionada pela revisão de literatura escolhida.

Para além das tarefas de investigação foram elaboradas fichas informativas para introduzir os conceitos chave, essenciais para a compreensão das tarefas. Estas fichas informativas foram utilizadas como introdução a cada uma das tarefas de investigação ou exploração contendo, por exemplo, a noção de pavimentação, aresta e vértice de uma pavimentação e a nomenclatura associada ao estudo das pavimentações. Sempre que ia sendo necessário introduzir conceitos teóricos com vista a poderem ser realizadas as tarefas de investigação e exploração era fornecida uma ficha informativa a cada grupo de alunos acrescida de uma pequena explicação por parte da professora (quando solicitada) de modo a não existirem dúvidas relativamente aos conceitos. A decisão da elaboração destas fichas teve a ver com o facto de se tentar evitar a tradicional aula expositiva e ganhar algum tempo e ainda promover a autonomia dos alunos. Por outro lado a decisão da aplicação destas fichas (informativas) também permitiu que os grupos não necessitassem de efectuar as tarefas nas mesmas alturas. Foi possível que cada grupo gerisse o seu próprio tempo e estas fichas iam sendo fornecidas na medida da necessidade de trabalho de cada grupo respeitando a planificação pré-estabelecida para a realização das tarefas, de acordo com as justificações que se apresentaram anteriormente.

Todos os materiais (fichas informativas e tarefas de investigação e exploração) foram fornecidos em suporte digital aos alunos, disponibilizados no servidor da rede escolar, não tendo sido fornecido nenhum documento em formato papel (com excepção do guião do GSP que existia para consulta). Existia uma pasta pertencente à turma e à disciplina de Matemática na rede da escola onde os materiais eram disponibilizados aos alunos à medida que estes iam avançando na realização das suas tarefas. Este procedimento foi ligeiramente alterado a meio da investigação de modo a permitir que alguns alunos (aqueles com mais dificuldades), que não conseguiam realizar algumas das tarefas, pudessem prosseguir os seus trabalhos sem ficarem condicionados: num determinado momento foi permitido a alguns grupos que tentassem realizar a tarefa seguinte sem terem terminado a anterior. Esta situação foi mais recorrente em grupos que não estavam a ser observados e portanto que não fazem parte deste estudo embora possam ser referidos na apresentação dos resultados de modo a facilitar o enquadramento e permitir a contextualização do trabalho no grupo turma.

Descrição das fichas e tarefas produzidas e utilizadas

De seguida apresenta-se a descrição das fichas pela ordem cronológica da sua aplicação.

Ficha Informativa 1 – Pavimentações (Anexo 2)

A primeira ficha contém a definição de pavimentação, aresta e vértice de uma pavimentação assim como a definição de pavimentação regular e respectivas características, apresentando um exemplo de cada situação.

Esta foi a única ficha que foi acompanhada de uma explicação ao grupo - turma.

Tarefa 1 – Pavimentações com triângulos (Anexo 3)

Esta tarefa é uma tarefa muito guiada, com todos os passos para a elaboração de uma pavimentação regular com triângulos. Utiliza rotações utilizando como centro de rotação o ponto médio de um dos lados do triângulo. De seguida utiliza translações dos dois triângulos obtidos anteriormente. A repetição sucessiva do segundo processo origina a construção de um friso. Não é dada mais nenhuma instrução e pede-se que seja pavimentado o plano utilizando os processos anteriores. Foi deixado à consideração dos alunos o tipo de triângulos que poderiam utilizar (escalenos, equiláteros, isósceles).

O tipo de questões formuladas é bastante aberto, não condicionantes das respostas esperadas: pede-se uma justificação para o facto do triângulo que construíram pavimentar o plano e questiona-se se qualquer triângulo pode pavimentar o plano pedindo aos alunos que elaborem uma conjectura a este respeito e que, posteriormente, a justifiquem.

Ficha Informativa 2 – Transformações Geométricas – Isometrias (Anexo 4)

A segunda ficha informativa inclui uma nota introdutória de contextualização sobre isometrias, a definição de isometria e descrição das isometrias do plano: rotação, translação e reflexão. Não são fornecidos quaisquer exemplos.

Ficha Informativa 3 – Isometrias com o GSP (Anexo 5)

Esta ficha é uma descrição (guião) dos procedimentos no GSP utilizando translações, rotações e reflexões. No caso das translações o processo que se descreve é o de translação segundo uma direcção (vector), no caso das rotações o processo descrito é o de rotação dado um centro de rotação e uma amplitude fixa. A reflexão é descrita através da utilização da ferramenta "espelho" utilizando um segmento de recta como eixo de simetria. Em todos as processos descritos se utiliza o mesmo menu do GSP: o menu *Transform*.

Tarefa 2 – Pavimentações Regulares (Anexo 6)

Esta tarefa não dispõe de guião/instruções, para a construção das pavimentações uma vez que foi previamente fornecida a ficha informativa 3 e é constituída por duas partes. Na primeira parte pede-se que construam vários tipos de pavimentação regular, e apresenta-se o objectivo desta subtarefa que é o de descobrir o número de pavimentações regulares. A segunda parte não envolve a construção de *sketches* (devem utilizar as construídas na primeira parte da tarefa) e tem questões de natureza teórica a que os alunos deverão responder por escrito. As questões estão divididas em dois grupos: um grupo de questões orientadas especificamente para as construções que efectuaram e, outro grupo com carácter mais aberto a que se chamaram conclusões e que pretendem fornecer pistas para responder ao objectivo desta segunda parte que é descobrir as razões que fazem com que um polígono regular pavimente. Pretende-se que o primeiro conjunto de questões conduza aos resultados do segundo grupo.

Do segundo grupo de questões faz parte um resultado algébrico relacionado com a condição para que um polígono pavimente o plano, utilizando os ângulos internos do polígono. Pede-se que os alunos conjecturem sobre essa condição a partir dos resultados obtidos e que encontrem uma condição necessária e suficiente para que um polígono pavimente o plano.

Ficha Informativa 4 – Pavimentações Semi-Regulares (Anexo 7)

Da quarta ficha informativa consta a definição de pavimentação semi-regular com dois exemplos de uma pavimentação com triângulos e hexágonos e a notação para a identificação de uma pavimentação semi-regular apresentando os exemplos das pavimentações representadas no exemplo anterior.

Tarefa 3 – Pavimentações Semi-Regulares (Anexo 8)

A última tarefa é constituída por três questões com objectivos diferenciados embora relacionados. A primeira e a segunda questão pretendem identificar algumas das pavimentações semi-regulares, mais especificamente aquelas em que num vértice concorrem três polígonos e um deles é um triângulo equilátero ou um quadrado. A terceira questão tem como objectivo chegar a um resultado algébrico importante na teoria das pavimentações relativo ao número de lados dos polígonos concorrentes num vértice de uma pavimentação semi-regular e cujos resultados obtidos nas questões I e II pretendem ser um auxílio para a resposta dos alunos a esta questão. Sugere-se que seja construído um quadro para registo dos resultados.

PROCEDIMENTOS DE RECOLHA E ANÁLISE DE DADOS

Segundo Yin (1993, p.67) existem três princípios fundamentais para a recolha de dados num estudo de caso: usar múltiplas fontes de evidências permitindo assim que as conclusões possam ser validadas por meio de variadas fontes; permitir a construção de uma base de dados ao longo do estudo, através de notas, documentos, descrições e interpretações que podem ser utilizadas por outros investigadores e formar uma cadeia de evidências, de modo a permitir que o leitor perceba a apresentação das evidências desde o momento da colocação de questões até às conclusões finais.

Nesta etapa do estudo, dentro da diversidade de instrumentos que se podem e devem utilizar, recorreu-se à observação directa e notas de campo, ao registo obtido dos computadores (*sketches* construídos pelos alunos) de modo a entender os processos utilizados na resolução das tarefas apresentadas, à análise das respostas produzidas pelos alunos na sequência da realização das tarefas e a um questionário (Anexo 9) realizado no final da aplicação das tarefas. Procurou-se, deste modo, obter uma descrição pormenorizada dos dados de maneira a poderem ser interpretados, com vista à resposta das questões do estudo:

A. Com a utilização de um ambiente de geometria dinâmica que tipo de aprendizagens estão associadas ao estudo das pavimentações?
B. Qual o tipo de conhecimentos que os alunos mobilizam para a construção de pavimentações, quando utilizam um ambiente de geometria dinâmica?
C. De que forma as potencialidades de um AGD (GSP) contribuem para o estudo das propriedades algébricas relativas às pavimentações?
D. A utilização do GSP em actividades específicas de exploração e/ou investigação em geometria influencia o modo como os alunos perspectivam o estudo da Geometria em geral?

A recolha de dados neste estudo é da exclusiva responsabilidade da professora/investigadora e no contexto da sala de aula, baseando-se essencialmente nos instrumentos que se enumeram em seguida.

Todos os dados e evidências recolhidas, com excepção do questionário, decorreram no ambiente natural da sala de aula. O questionário foi respondido por escrito fora do contexto da aula, enviado por correio electrónico às alunas que o devolveram preenchido.

Como se pretendia, foram diversos os instrumentos de recolha de dados considerados nesta investigação: os registos feitos pela professora/investigadora, nomeadamente as notas de campo da actividade dos grupos em estudo durante a resolução das tarefas (onde constam o resultado das observações de atitudes e reacções dos alunos durante a realização das tarefas, interacção com o *software* e interacção inter-grupo e entre grupos); os relatórios e as respostas elaboradas pelos grupos para as tarefas que os solicitavam; conversas de carácter informal, ocorridas durante a observação das aulas e realização das tarefas e análise dos *sketches* produzidos e do histórico do *software*. Esta recolha de dados teve sempre em conta os objectivos e questões do estudo de forma a obter-se informação pertinente e relevante para este estudo.

Com uma estratégia de recolha de dados diversificada pretende-se assegurar as múltiplas perspectivas dos participantes no estudo, alunos e professora/investigadora:

> Assim, qualquer descoberta ou conclusão em um estudo de caso provavelmente será muito mais convincente e acurada se baseada em

> várias fontes distintas de informação obedecendo a um estilo corroborativo de pesquisa (Yin, 2005, p.126).

Desta forma pretendeu-se também assegurar a triangulação das fontes de dados, uma das características importantes na metodologia de um estudo de caso. Segundo Meirinhos e Osório (2010) a triangulação permite obter informação de mais que uma fonte referente ao mesmo acontecimento de modo a aumentar a sua fiabilidade.

Assim, assegurando as múltiplas perspectivas dos participantes e a triangulação dos dados sustenta-se um estudo sólido e convincente.

A professora/investigadora foi a única fonte de recolha de dados, originando assim uma observação participante, com diferentes níveis de implicação, de acordo com as necessidades que foram surgindo, podendo ser uma mais-valia no estudo:

> (...) para alguns tópicos da pesquisa, pode não haver outro modo de colectar evidências a não ser através da observação participante. Outra oportunidade muito interessante é a capacidade de perceber a realidade do ponto de vista de alguém de "dentro" do estudo de caso, e não de um ponto de vista externo (Yin, 2005, p.122)

A questão da observação participante pode levantar algumas questões nomeadamente no que diz respeito há interferência que o investigador possa eventualmente ter. No entanto alguns autores como Meirinhos e Osório (2010, p.13) apresentam algumas vantagens que podem advir desse facto como por exemplo "uma maior aproximação à realidade dos dados, uma melhor compreensão das motivações das pessoas e uma maior facilidade na interpretação das variáveis no contexto do estudo".

Depois de recolhidos, os dados serão organizados e analisados procedendo-se nesse instante a alguma interpretação relativa aos mesmos, numa primeira abordagem às questões em estudo e com vista à elaboração das conclusões finais.

Em suma, após ter sido escolhido o desenho da investigação e tomada a opção metodológica do estudo de caso foram escolhidos os participantes, delineadas as estratégias de recolha e processamento dos dados a partir das múltiplas fontes de evidências procedendo-se em seguida à triangulação da informação para procurar responder às questões em estudo que ligada à revisão de literatura escolhida e que fundamenta este estudo constituirá a base para a elaboração das conclusões deste estudo no capítulo final.

CAPÍTULO IV- ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Como foi referido no capítulo anterior, as aulas iniciaram com uma explicação prévia de como trabalhar com o *software*, numa aula expositiva, com o quadro interactivo como suporte. Foram explicadas, através de exemplos, apenas noções básicas: como construir segmentos de recta, rectas, circunferências, polígonos interiores, medições de comprimentos e de ângulos, seleccionar objectos, esconder objectos e onde foi igualmente explicada a noção de dependência dos objectos característica do programa. Também foi explicado que a característica fundamental de uma figura bem construída era o não se “desmanchar” e foi dado um exemplo do que era uma construção incorrecta. Os alunos iam manipulando em simultâneo tentando reproduzir o que ia sendo feito.

A tarefa introdutória não foi inicialmente pensada para ser observada, pretendia ser uma forma de que os alunos se familiarizassem com o *software* e recordassem conceitos. No entanto, foram recolhidas evidências dessa aula que se tomou como opção integrarem o estudo.

As únicas informações de que os alunos dispunham quando lhes foi proposta esta tarefa eram a informação respeitante à utilização do *software* (da aula inicial) e os conhecimentos que tinham do 3º ciclo. A postura da professora/investigadora foi de deixar os alunos efectuarem as tarefas por tentativa e erro, não respondendo às dúvidas que iam colocando o que eram questões bastante elementares, que os alunos só questionavam por “preguiça de pensar”.

Ao longo de toda a investigação foi sendo necessário recordar aos alunos que as construções tinham que obedecer ao critério de não se “desmancharem”. Alguns foram tendo dificuldades pois por quererem ganhar tempo não efectuavam correctamente as construções e consequentemente não retiravam as conclusões pretendidas. Foi sendo necessário um retrocesso nas tarefas de modo a cumprir os objectivos.

Tarefa Introdutória

A tarefa introdutória consistia em construir polígonos regulares e medir ângulos para numa fase final chegar à conjectura e demonstração da fórmula para os ângulos internos de um polígono regular.

De salientar que esta é uma actividade que se faz com algum sucesso ao nível do ensino básico, pelo que à partida estes alunos não iriam revelar muitas dificuldades na sua execução.

- **Grupo A**

Este grupo conseguiu construir todos os polígonos regulares a que se propuseram, até ao octógono, utilizando os conhecimentos de Geometria Descritiva, construindo uma circunferência, dividindo em *n* lados iguais (de acordo com o polígono que pretendiam construir) e depois construindo segmentos de recta.

Questionam o que se pretende com a conjectura, se é para dizer alguma coisa ou apresentar alguma fórmula. É respondido que se for possível devem apresentar uma fórmula. A Ana lembra-se rapidamente que a aprendeu no ensino básico, tenta lembrar-se, e consegue fazê-lo com a ajuda do Marco que refere que "tinha 180°".

Pelo facto de ser um resultado já estudado e ter sido explicado pelo professor nos anos lectivos anteriores não sentem necessidade de justificar. A Ana diz "Então nós já sabemos que é verdade".

Após alguma insistência da professora/investigadora escrevem (correctamente) uma expressão que permite obter a amplitude dos ângulos internos de um polígono regular a partir do número de lados desse polígono. Testam a conjectura e verificam que a mesma é válida em todos os casos dos polígonos que construíram. A partir deste momento aceitam a conjectura como verdadeira e não sentem necessidade de mais nenhuma justificação. Quando são questionados pela professora/investigadora sobre se a expressão será verdadeira para todos os polígonos regulares a Ana volta a referir "então já sabemos porque demos no 9º ano".

- **Grupo B**

O grupo conseguiu construir os triângulos e os quadrados sem dificuldades e sem pedir ajuda, quando passaram à construção dos pentágonos tiveram bastantes dificuldades efectuando diversas construções e verificando sempre que "não davam". Como tal, recorreram muitas vezes à ajuda do grupo da Ana e do Marco, que estavam localizados no computador ao lado, colocando questões, não sentindo por isso necessidade de o fazer com a professora. Com algumas sugestões dos colegas conseguiram então construir com sucesso os pentágonos e os restantes polígonos até ao heptágono.

Estas alunas têm muitas dificuldades em chegar ao resultado relativamente aos ângulos internos, não sabem/não se recordam da fórmula. Mesmo depois dos colegas do outro grupo lhes dizerem continuaram confusas. Para elas a tarefa terminou com a construção dos *sketches*. Copiam a fórmula dos colegas do grupo A que ao mesmo tempo lhes tentam explicar como aplicá-la sem surtir nenhum efeito positivo.

- **Grupo C**

Estas alunas construíram todos os polígonos regulares sem grandes dificuldades e sem colocar questões à professora, estiveram muito concentradas durante a realização da tarefa e as únicas questões que iam colocando eram sobre questões de ordem técnica sobre o *software* e de pouca importância como, por exemplo, mudar a cor dos objectos.

Para a construção dos polígonos utilizaram o mesmo processo que os alunos do grupo A, dividiram uma circunferência em *n* partes iguais de acordo com o polígono que pretendiam construir. Solicitaram ajuda da professora/investigadora para a medição de ângulos e tiveram bastantes dificuldades em perceber o que se entendia como conjectura, mesmo depois das explicações fornecidas. Não chegaram a apresentar nenhuma conjectura nem nunca escreveram a expressão que permite obter os ângulos internos de um polígono regular a partir do número de lados desse polígono.

Tarefa 1

Esta tarefa refere-se ao estudo de pavimentações com triângulos e é uma tarefa com um guião fechado para a construção do *sketch*. Direcciona para a utilização de rotações, utilizando o ponto médio de um dos lados do triângulo e posteriormente translações segundo um vector. As questões colocadas têm como objectivo principal perceber se os alunos compreenderam o conceito de "pavimentar" e por outro lado se conseguem conjecturar e provar um resultado relativo às pavimentações (que qualquer triângulo pavimenta o plano).

- **Grupo A**

Os alunos construíram as pavimentações sem dificuldade. Construíram triângulos (não equiláteros) e utilizaram translações para construir a pavimentação (Fig.1.A, Fig.1.B e 2). Como fizeram a tarefa muito rapidamente, quando leram as questões colocadas fizeram uma nova pavimentação desta vez com triângulos equiláteros, antecipando a tarefa seguinte.

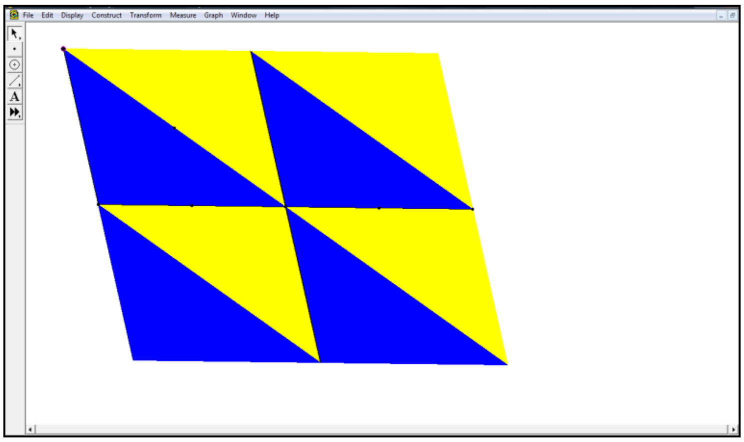


Figura 3.1.A. – Pavimentação com triângulos; Tarefa 1; Grupo A

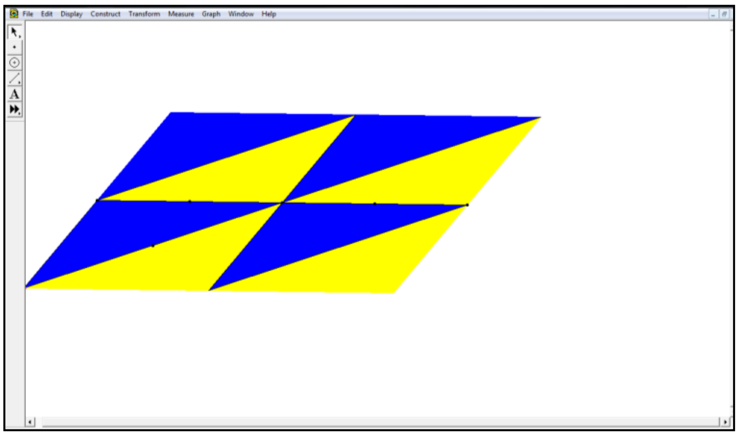


Figura 3.1.B. - Pavimentação com triângulos; Tarefa 1; Grupo A

Para construírem os triângulos equiláteros, este grupo utilizou o processo de construção utilizado na tarefa introdutória, intersecção de circunferências e translações para a construção da pavimentação (Fig.2)

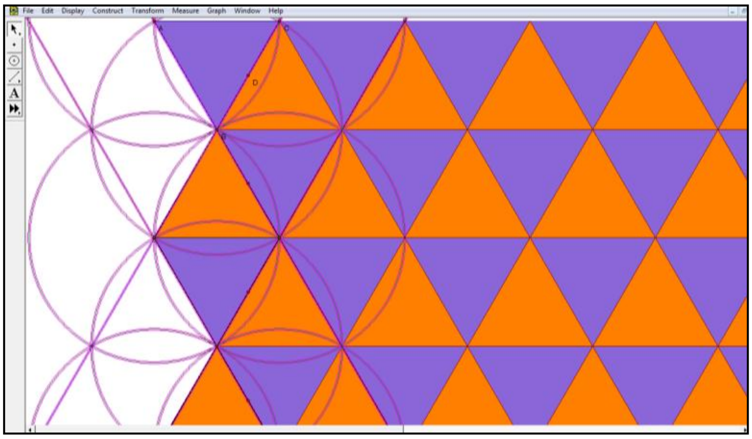


Figura 3.2. - Pavimentação com triângulos equiláteros; Tarefa 1; Grupo A

Os alunos formularam rapidamente a conjectura “para pavimentar é preciso formar um ângulo de 360º”, descurando muita da linguagem formal: omitem o facto de o ângulo se referir ao vértice da pavimentação. Questionam a professora algumas vezes sobre como justificar: “*Setôra*, como é que provamos, pode ser por escrito ou tem que ser com cálculos?”

Quando se insistiu para que justificassem com algum cuidado, a Ana pede para utilizar o quadro tradicional porque diz “eu assim penso melhor”. Discute ideias com o Marco, sobre a amplitude dos ângulos internos do triângulo, a soma dos ângulos internos enquanto desenha no quadro preto (Fig.3) e murmura algumas coisas imperceptíveis. Identifica ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos na pavimentação cujo esboço fez no quadro preto e justifica que são iguais mas não utiliza esta justificação depois na resposta escrita apesar de o ter referido verbalmente algumas vezes enquanto em voz alta escrevia no quadro.

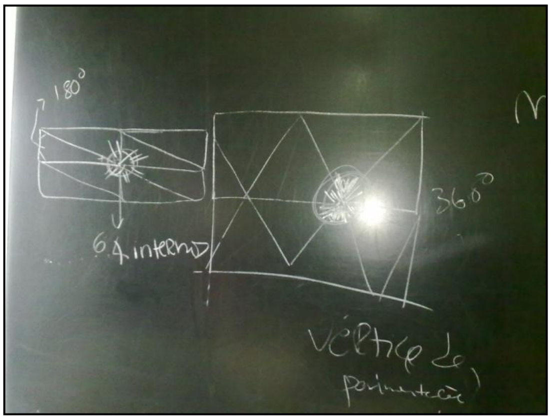


Figura 3.3. – Justificação da conjectura; Tarefa 1; Grupo A

Depois da Ana ter efectuado esta representação e depois de o Marco ter acrescentado que o desenho "não deve chegar" que têm que "responder à pergunta" (referia-se à justificação da conjectura) sentam-se para escrever a resposta seguinte:

> A forma geométrica do triângulo pode sempre criar uma pavimentação quer seja regular ou irregular. O vértice da pavimentação obriga a que passem 6 vértices, um de cada triângulo pelo vértice da pavimentação. A soma dos ângulos internos é 180° e visto que em volta do vértice da pavimentação existe um ângulo de 360° e passam por lá 6 vértices, um de cada triângulo, passam então irrefutavelmente 6 ângulos internos, um de cada triângulo e como a soma dos ângulos internos do triângulo (3 ângulos) é de 180°, 6 ângulos internos vão fazer os 360°. Os ângulos são iguais dois a dois e são verticalmente opostos.

A Ana ia redigindo o texto e o Marco ia dizendo algumas das coisas que a Ana devia escrever, como por exemplo a soma dos ângulos internos ser 180°.

Estes alunos compreenderam correctamente a noção de pavimentação e apresentam justificações convincentes para a sua conjectura, utilizam conhecimentos adquiridos em anos anteriores e que sabem, segundo eles, serem "verdades matemáticas".

- **Grupo B**

As alunas constroem sem muita dificuldade o friso, têm facilidade em seguir o guião e, por esta altura, já dominam com alguma facilidade os comandos do programa. Começam por reproduzir o que está no guião e sentem algumas dificuldades quando é necessário pavimentar o resto do plano, é vulgar ouvir comentários como "então mas aqui não precisamos do ponto médio?" quando precisam de fazer uma translação "para baixo". A instrução do guião para efectuar a rotação do triângulo utiliza como centro de rotação o ponto médio de um dos lados do triângulo, daí a observação das alunas.

De início, por não conseguirem pavimentar o resto do plano, revelam alguma frustração e por experimentação conseguem efectuar a pavimentação pedida. Precisam de voltar atrás muitas vezes porque as suas construções se "desmancham". Como o primeiro *sketch* não correu bem (por construção incorrecta, desmanchava-se), começaram de novo e desta vez conseguiram desde o primeiro momento construir correctamente a pavimentação (Fig.4).

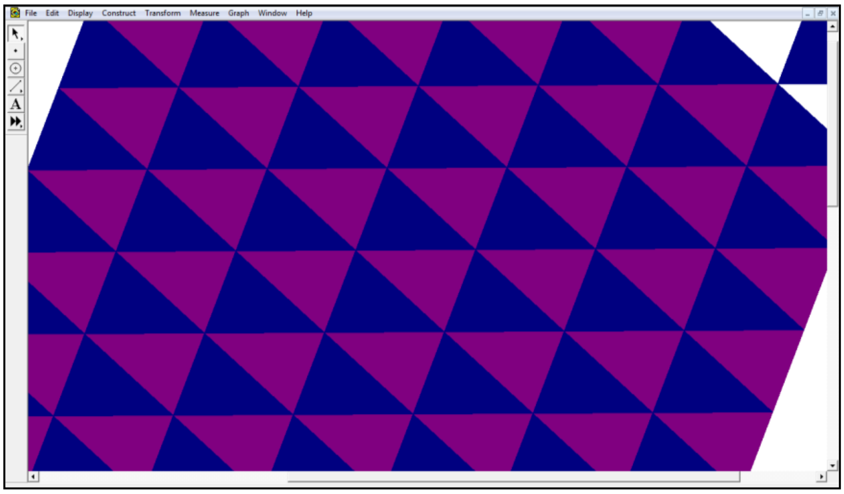


Figura 3.4 - Pavimentação com triângulos; Tarefa 1; Grupo B

Quando são confrontadas com as questões têm alguma dificuldade em compreender o que é o vértice da pavimentação (é necessária a intervenção da professora/investigadora) mesmo com a consulta à ficha informativa 1, no entanto classificam facilmente os triângulos. A ficha informativa 1 foi elaborada com o propósito de clarificar dúvidas que fossem surgindo no decorrer da aplicação das tarefas e também para que os alunos não estivessem sempre a solicitar o apoio da professora/investigadora, contém a definição de pavimentação, a noção de vértice e aresta de uma pavimentação apresentando exemplos simples.

O grupo questiona sobre o que têm que fazer exactamente quando se pede para elaborarem uma conjectura e acabam por não elaborar nenhuma, respondem assim às questões:

1- Sim pavimenta o plano porque é uma pavimentação regular (uma pavimentação regular é formada apenas por um polígono) e porque os vértices da pavimentação são coincidentes com os vértices do polígono e as arestas da pavimentação coincidem com os lados do polígono.
2- Sim, todos os triângulos pavimentam o plano porque sendo uma pavimentação regular o vértice do plano vai ser sempre coincidente com os vértices do triângulo.
3- Com um vértice comum os triângulos vão ter os ângulos iguais, logo a volta desse vértice vai ter que estar 6 triângulos cuja soma sejam 360 graus.

As alunas limitaram-se a utilizar a ficha informativa, para copiar a informação que esta continha, para a elaboração da sua primeira resposta. Na resposta à segunda questão há alguma confusão (ainda) no que diz respeito ao que é o vértice da pavimentação (dizem "do plano"). A resposta à terceira questão foi escrita depois de terem trocado algumas impressões com o grupo A, no entanto escrevem apenas aquilo que retiveram dessa conversa sem sentirem necessidade de apresentar mais justificações.

Este grupo denotou algumas dificuldades na compreensão do conceito de pavimentação e dos conceitos associados assim como na elaboração da conjectura.

- **Grupo C**

Este grupo seguiu o guião na íntegra sem nunca colocar questões, trabalham em silêncio, e apenas trocam ideias, entre si, pontualmente sobre os comandos do GSP que devem utilizar.

Constroem a pavimentação sem dificuldade (seguindo o guião) e utilizam translações segundo um vector para pavimentar o plano (Fig 5.).

Estas alunas utilizaram rotações para a construção do triângulo ladrilho da pavimentação e como tal a sua pavimentação é "estática": os triângulos não alteram o comprimento dos lados, o que lhes causa alguma estranheza e questionam porque é que isso acontece por comparação dos *sketchs* dos colegas dos outros grupos.

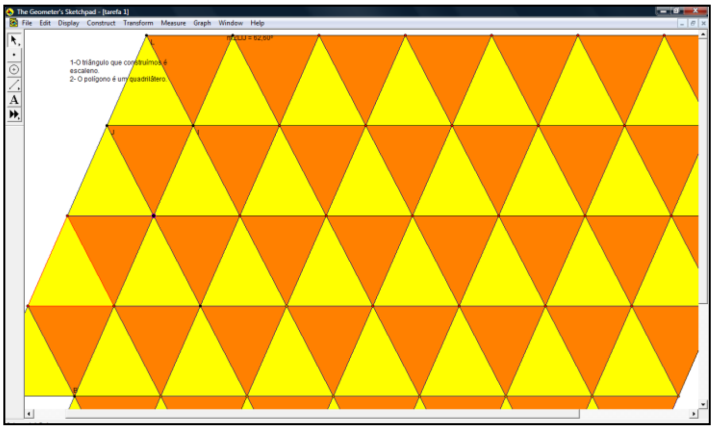


Figura 3.5. – Pavimentação com triângulos; Tarefa 1; Grupo C

Relativamente às questões que são colocadas no final da tarefa sobre se os triângulos pavimentam o plano e a respectiva justificação, apresentam como resposta:

1. Porque ao juntar vários triângulos criamos um padrão que pavimenta o plano. Uma pavimentação é conjunto numerável de ladrilhos que cobrem um plano sem espaços intermédios nem sobreposições. Os interiores dos ladrilhos são disjuntos dois a dois pelo que não existem sobreposições. De notar que, se um ponto pertence a mais do que um ladrilho, então ele pertence necessariamente à fronteira dos ladrilhos e não ao seu interior.

Compreendem a noção de pavimentação e utilizam o vocabulário próprio, recorrendo à ficha informativa.

Relativamente à questão “Será que todo o triângulo pavimenta o plano?” respondem sem apresentar qualquer tipo de justificação “Sim, o triângulo pavimenta o todo o plano”.

Não respondem à questão 3 (pede-se a elaboração e justificação de uma conjectura), colocam muitas questões e não compreendem o que lhes é pedido. Mesmo depois da intervenção da professora/investigadora no sentido de clarificar a questão com alguma insistência continuam a afirmar “não percebemos o que é para fazer”, diz a Daniela. Após alguns momentos em que olham várias vezes para o ecrã e para o que escreveram anteriormente abandonam a tarefa e passam à tarefa seguinte.

Eventualmente as alunas não interiorizaram o significado de conjectura apesar de não terem tido dificuldades em generalizar os resultados obtidos com a realização da tarefa, e após a resposta à questão número um, respondendo que todos os triângulos pavimentam o plano. O facto de não terem apresentado quaisquer justificações na resposta à questão dois pode levar à interpretação de que esta resposta foi dada aleatoriamente sem terem efectivamente compreendido quais as razões que levam qualquer triângulo a pavimentar o plano.

Tarefa 2

Esta tarefa tem características distintas da tarefa 1. Na sua elaboração tomou-se como opção não incluir guião para a construção dos *sketches* uma vez que os alunos já tinham tido oportunidade de utilizar as diferentes ferramentas do *software* na construção dos *skecthes* da tarefa anterior e deste modo seria possível inferir se a existência ou não de guião condicionava o normal desenrolar da actividade permitindo também verificar o tipo de aprendizagens que estavam envolvidas quando efectuavam as construções sem condicionantes. A tarefa tem como objectivo descobrir quais são as pavimentações regulares que existem e as razões que fazem com que um polígono regular pavimente o plano. Como tal foram colocadas questões (relativas às construções efectuadas), referentes ao número de polígonos concorrentes num vértice e aos lados e ângulos internos de cada polígono, que pretendem induzir as conclusões pretendidas: uma expressão matemática que seja uma condição para que um polígono pavimente o plano (relacionando o número de lados e os ângulos internos desse polígono) através da elaboração de uma conjectura. No final da tarefa pede-se que os alunos encontrem uma condição necessária e suficiente para ser possível criar uma pavimentação regular.

- **Grupo A**

Estes alunos não revelaram nenhuma dificuldade na construção dos polígonos regulares, constroem cada um dos polígonos dividindo a circunferência em n lados iguais e através de rotações constroem as pavimentações solicitadas sem dificuldades. A Ana refere logo que no caso dos pentágonos não dá porque "ficam umas orelhinhas e um espacinho". São raras as vezes em que utiliza linguagem formal quando existe troca de ideias com o colega de grupo, no entanto quando lhe é solicitada uma resposta escrita faz algum esforço por utilizar linguagem correcta e formal o que acontece a maioria das vezes. Assim, neste caso poderá inferir-se que este factor não é condicionante das suas aprendizagens. A Ana, quando é questionada sobre se consegue justificar porque é que tal acontece refere automaticamente que "é por causa dos ângulos internos" mas não concretiza.

Ultrapassam as questões colocadas na tarefa respondendo em voz alta e tentam justificar a existência de pavimentações regulares, utilizam o quadro para registar as suas conclusões (Fig. 6; Fig.7 e Fig. 8)

A Ana sabe a medida dos ângulos internos dos polígonos e tenta formular uma conjectura, uma expressão matemática que relaciona o número de lados e os ângulos internos do polígono que seja condição para que o polígono pavimente o plano. Continua a afirmar que se consegue concentrar melhor se utilizar o quadro preto, pede autorização e levanta-se para fazer um esboço das pavimentações com triângulos (essencialmente de um vértice dessa pavimentação) e elaborar a conjectura. Testa a conjectura e verifica que apesar de "funcionar para os quadrados, não funciona para os triângulos" (Fig.6) e regista alguma frustração. Durante esta fase o Marco permaneceu sentado e foi dizendo várias vezes que se a expressão tinha que ser igual a 360 então "tem que aparecer o dobro em qualquer lado, porque senão não dá".

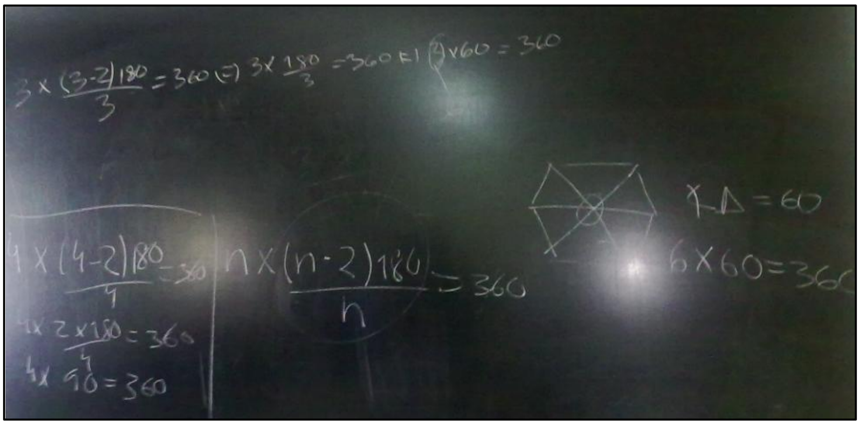


Figura 3.6.- Pavimentação regular; Tarefa 2; Grupo A

Depois de a conjectura ter falhado faz nova tentativa, desta vez esboçando uma pavimentação com quadrados (novamente um vértice da pavimentação com quadrados) e explora a ideia do Marco de que "tem que ser o dobro " (Fig.7). Testam a conjectura e verificam novamente que falha.

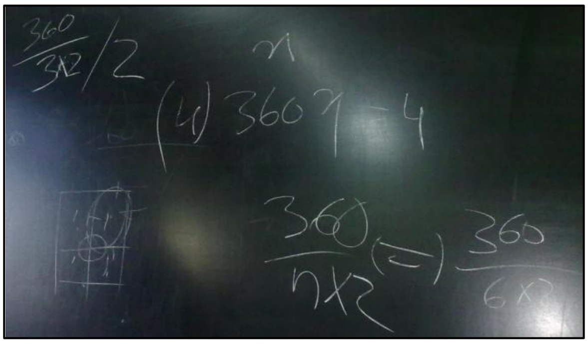


Figura 3.7. - Pavimentação regular; Tarefa 2; Grupo A

Este procedimento repete-se ao longo da aula com sucessivas tentativas para encontrar a expressão que pretendem e que vão testando à medida que vão avançando. Afirmam várias vezes que "é óbvio que para pavimentar tem que ser 360° no vértice", testam no caso dos triângulos, quadrados e efectuam uma tentativa de generalização para os outros polígonos regulares (Fig.8). Os alunos abandonaram completamente as construções que efectuaram com o GSP, o computador foi inclusive desligado e durante a fase de elaboração das conjecturas só utilizaram os conhecimentos que tinham sobre os polígonos. Neste caso, em termos de aprendizagem, a construção das pavimentações utilizando o AGD não foi significativa para a elaboração das conjecturas.

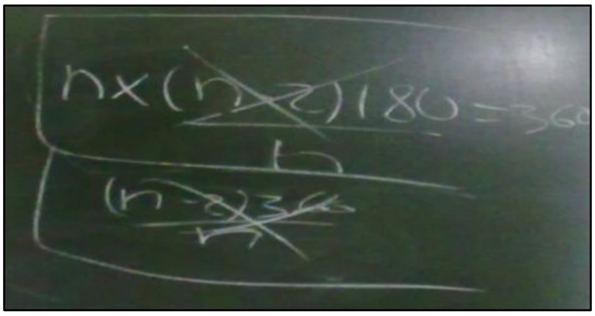


Figura 3.1. - Pavimentação regular; Tarefa 2; Grupo A

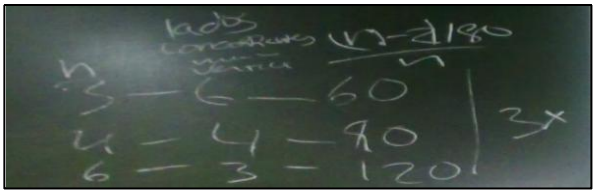


Figura 3.9. - Conjectura; Tarefa 2; Grupo A

Seguindo a mesma linha de raciocínio que utilizaram para a elaboração da conjectura justificam quais os polígonos com os quais não é possível fazer uma pavimentação regular. Não registam o que dizem e tomam como um resultado “óbvio”.

Copiam para o papel os resultados que registaram no quadro e respondem correctamente às questões colocadas nas conclusões da tarefa (sobre o número de polígonos concorrentes no vértice da pavimentação, o número de pavimentações regulares e a amplitude dos ângulos internos dos polígonos).

Após alguma insistência e incentivo chegam a um resultado que testam para os polígonos que pavimentam (Fig.9.). Após verificarem que o resultado é válido para o caso dos triângulos, quadrados e hexágonos consideram o trabalho concluído (Fig. 10 e Fig. 11).

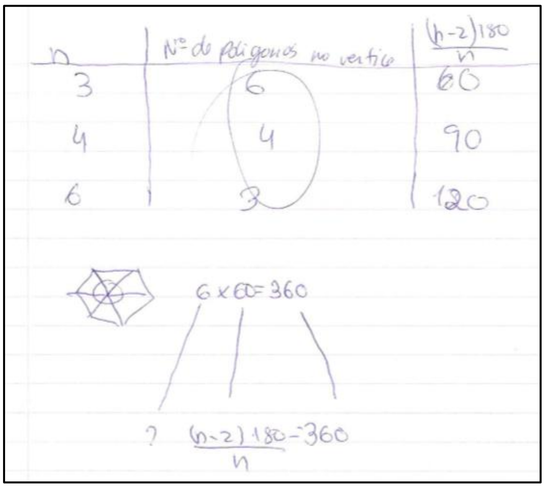


Figura 3.10 – Formulação e teste de conjecturas; Tarefa 2; Grupo A

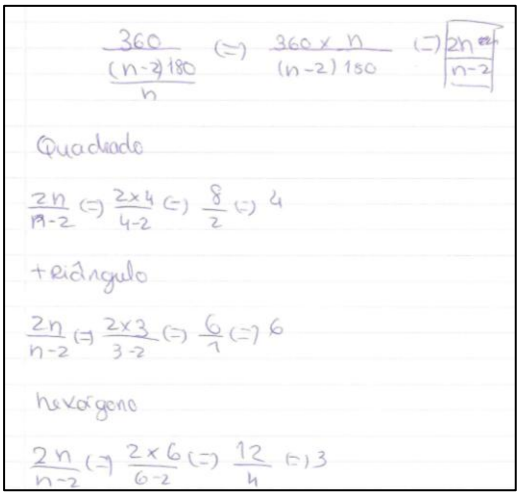


Figura 3.11 - Formulação e teste de conjecturas; Tarefa 2; Grupo A

A Ana e o Marco concluíram a realização da tarefa com sucesso efectuando todas as construções solicitadas e respondendo correctamente às questões colocadas. No decorrer deste processo elaboraram algumas conjecturas que foram testando e abandonando porque "não dá" (Fig. 6; Fig. 7 e Fig. 8) sempre que isto acontece demonstram alguma frustração mas prosseguem com o seu trabalho. Apresentam como condição necessária e suficiente para que um polígono pavimente o plano que "a soma dos ângulos internos do polígono em volta do vértice da pavimentação tem que ser 360°".

Em termos de aprendizagens estes dois alunos cumpriram com os objectivos pretendidos com a realização da ficha: descobriram as pavimentações regulares possíveis e as razões que fazem com que um polígono regular pavimente. No caso deste grupo a utilização do GSP não foi um factor que motivasse para a formulação e teste das conjecturas elaboradas, aliás, como se disse, em determinado momento (na fase de elaboração e teste das conjecturas) foi mesmo abandonado. Adquiriram competências no que diz respeito às isometrias (pela elaboração das construções) utilizando, em todos os casos rotações para pavimentar o plano. No que respeita à formulação de conjecturas e pelo que se descreveu anteriormente também as competências foram adquiridas.

- **Grupo B**

As alunas deste grupo começaram por revelar muitas dificuldades na construção dos pentágonos, foi necessária a intervenção dos colegas do grupo A (a Ana e o Marco) para que conseguissem prosseguir com a tarefa. Depois de ultrapassado o primeiro constrangimento quando querem construir a pavimentação tentam seguir o mesmo processo que o utilizado na tarefa anterior (translação segundo um vector e utilizando o ponto médio) o que se revela obviamente infrutífero. Tentam começar do início e verificam que mesmo depois da ajuda dos colegas têm o pentágono mal construído pois "desmancha-se todo". Começam do princípio, com um novo *sketch*. Desta vez tentam utilizar as rotações e por tentativa e erro conseguem (Fig.12).

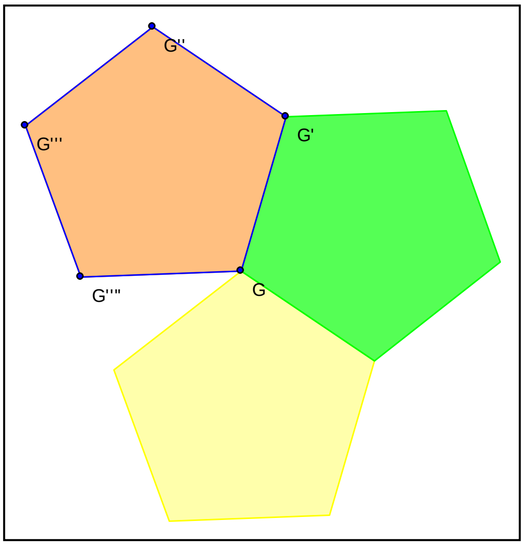


Figura 3.12. – Tentativa de pavimentação com pentágonos; Tarefa 2; Grupo B

A Neuza afirma de imediato que “é impossível o pentágono pavimentar, porque vai sobrar espaço” mas a Mélanie insiste falando nas colmeias, até rapidamente se aperceber “ah não, desculpa, isso é com hexágonos”. Quando tentam fazer a pavimentação com hexágonos têm muitas dificuldades em fazer as rotações e desistem com facilidade. Não conseguem definir qual o centro de rotação que devem utilizar e o ângulo de rotação. Fazem algumas tentativas que falham sempre pois o hexágono não fica “onde querem”. Depois de construírem três hexágonos perguntam “*setora* já chega?”. Após alguma insistência prosseguem os trabalhos e constroem uma pavimentação com hexágonos (Fig.13) através de rotações.

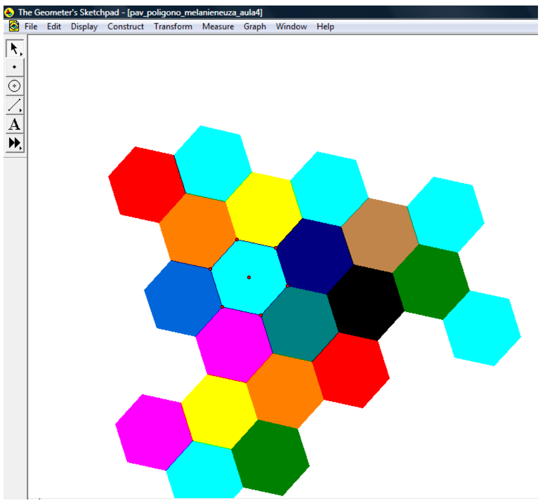


Figura 3.13. – Pavimentação com hexágonos; Tarefa 2; Grupo B

Numa caixa de texto, no *sketch* que contém a construção efectuada escrevem: "O hexágono dá para pavimentar pois os vértices da pavimentação coincidem com os vértices do polígono, e, as arestas da pavimentação coincidem com os lados do polígono. Ao contrário, acontece no heptágono e octógono, pois os vértices da pavimentação não coincidem com os vértices do polígono e as arestas da pavimentação não coincidem com os lados do polígono". Apesar de não justificarem formalmente a razão destes polígonos pavimentarem ou não interiorizaram o conceito de pavimentação e baseada nela apresentam justificação para as suas conclusões. Não fazem qualquer referência aos ângulos dos polígonos e em torno do vértice.

A preocupação deste grupo é maioritariamente a construção dos *skecthes*. Descuram muitas vezes as questões que são colocadas, contornando-as e dizendo "oh *setôra* isto é muito difícil". Preencheram correctamente a tabela colocada na tarefa (relativa aos lados e ângulos internos dos polígonos em cada uma das pavimentações construídas) por lhes ter sido recordadas várias vezes que o teriam que fazer mas não respondem a nenhuma questão das conclusões (apesar de terem concluído verbalmente sobre o número de pavimentações regulares), não elaboraram nenhuma conjectura e não apresentaram condições necessárias e suficientes para criar uma pavimentação regular.

Em termos de aprendizagens as duas alunas, a Neuza e a Mélanie, adquiriram competências ao nível da aquisição de conhecimentos relativas às isometrias essencialmente devido à facilidade com que efectuam tentativas de construção no GSP e após algumas dificuldades iniciais que ultrapassaram depois de compreendido a noção de rotação (centro e ângulo de rotação). Em termos de raciocínio e justificação, estas alunas não desenvolveram capacidades para produzir e justificar argumentos, não elaboram e consequentemente não justificam conjecturas.

- **Grupo C**

Estas alunas revelam um comportamento semelhante ao do grupo B porém sem terem dificuldades na utilização de isometrias nas suas construções. Não revelam dificuldades para construir a pavimentação com quadrados (Fig 14.), utilizam rotações e não colocam dúvidas nem qualquer outro tipo de questão. Constroem os quadrados por rotação.

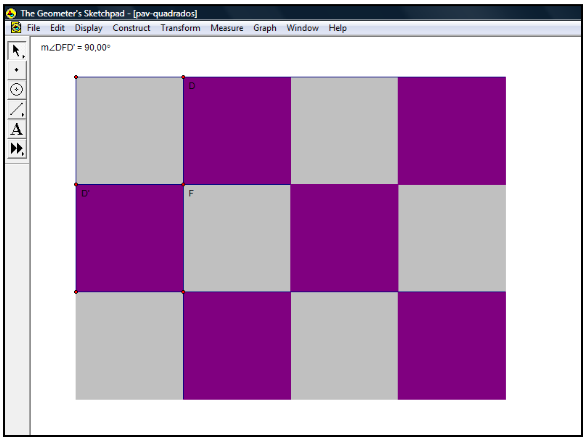


Figura 3.14. - Pavimentação com quadrados; Tarefa 2; Grupo C

Utilizam o mesmo processo para os pentágonos, rotações segundo o ângulo interno do pentágono e justificam porque é que os pentágonos não pavimentam o plano (Fig 15.):

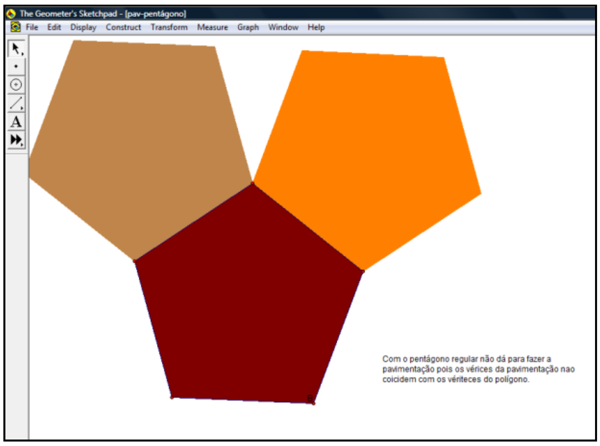


Figura 3.15. - Tentativa de pavimentação com pentágonos; Tarefa 2; Grupo B

Apresentam no *sketch* a seguinte justificação: "Com o pentágono regular não dá para fazer a pavimentação pois os vértices da pavimentação não coincidem com os vértices do polígono" muito à semelhança do que fizeram as alunas do grupo B. Também não fazem qualquer referência aos ângulos dos polígonos.

Para construírem o hexágono dividem a circunferência em seis partes iguais e pavimentam com hexágonos utilizando rotações do polígono encontrando o ângulo de rotação por tentativa e erro, vão experimentando (Fig. 16)

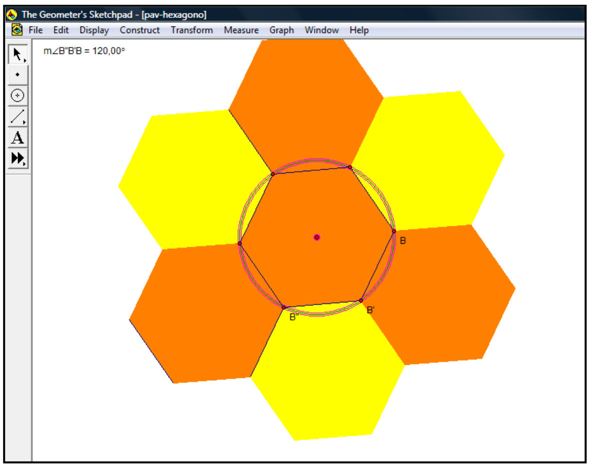


Figura 3.16. - Pavimentação com hexágonos; Tarefa 2; Grupo C

Quando tentam responder às questões colocadas na tarefa questionam como vão medir os ângulos (esquecem-se da ferramenta de medição de ângulos que utilizam depois de serem relembradas). Mesmo sem medir os ângulos internos avançam logo com a condição que a soma dos ângulos em torno do vértice "tem que ser 360°". Apresentam as respostas às questões de forma sintética, sobre o número de polígonos que partilham o vértice da pavimentação:

Quadrado – 4 polígonos;
Triângulo - 6 polígonos;
Hexágono – 3 polígonos.
O resto dos polígonos não pavimenta.

À questão sobre a soma das amplitudes de todos os ângulos que partilham esse vértice respondem:

Quadrado – amplitude dos ângulos = 360°;
Triângulo – amplitude dos ângulos = 360°;
Hexágono – amplitude dos ângulos = 360°

A última questão desta parte pretende relacionar a soma das amplitudes de todos os ângulos que partilham um vértice como condição para pavimentar, a Daniela e a Yulia deram a seguinte resposta "Se pavimentarem os polígonos eles dão uma volta completa". Apesar de não referirem a amplitude 360° a mesma está implícita na resposta.

São o único grupo que tenta construir pavimentações com octógonos (Fig. 17) e apresentam a respectiva justificação para o facto de não pavimentarem: "Os vértices da pavimentação não coincidem com os vértices do polígono. As arestas da pavimentação não coincidem com os lados do polígono”, a mesma que apresentaram para os pentágonos e que o grupo B também apresentou.

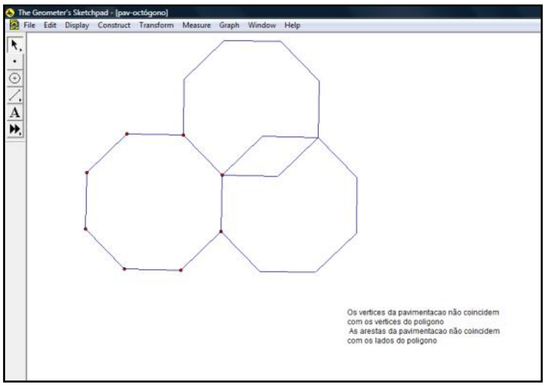


Figura 3.17.- Pavimentação com octógonos; Tarefa 2; Grupo C

Testaram todas as pavimentações, com eneágonos (Fig.18) e decágonos (Fig.19) e justificam sempre da mesma forma o facto de não pavimentarem, com a frase transcrita no parágrafo anterior, a mesma que se vê em letras pequenas no *skecth*.

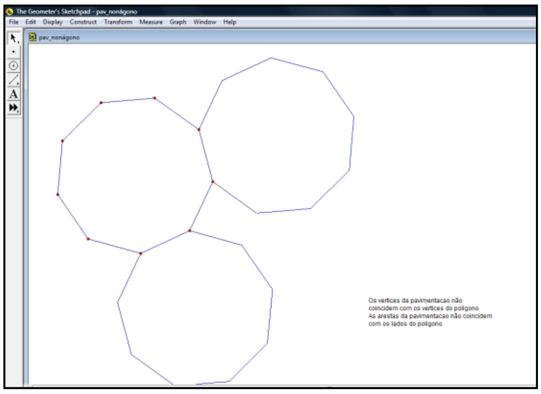


Figura 3.18. - Pavimentação com eneágonos; Tarefa 2; Grupo C

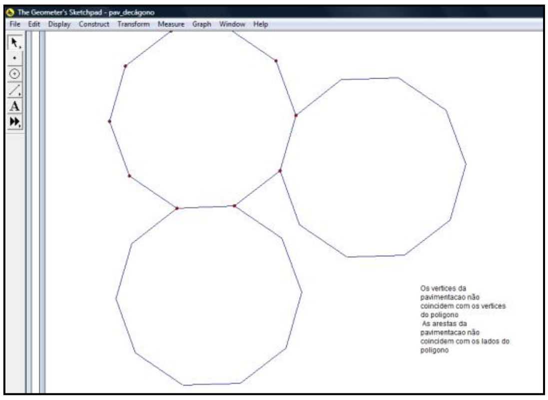


Figura 3.19. - Pavimentação com decágonos; Tarefa 2; Grupo C

Não respondem às perguntas colocadas nas conclusões (onde se pede a elaboração da conjectura para a expressão que seja condição para que um polígono regular pavimente o plano e uma condição necessária e suficiente para criar uma pavimentação regular), dizem que são difíceis e que não percebem e abandonam a tarefa sem sequer efectuar uma tentativa de elaboração de uma conjectura.

Estas alunas mobilizaram nesta tarefa todos os conhecimentos adquiridos em anos lectivos anteriores para efectuarem as construções das pavimentações utilizando com muita facilidade as ferramentas de rotação e translação de que o GSP dispõem, compreendem e aplicam correctamente a noção de rotação escolhendo de forma eficaz o centro e o ângulo de rotação a aplicar. Em termos de raciocínio e demonstração não formularam nenhuma conjectura nem efectuaram generalizações e como tal não desenvolveram capacidade de argumentação (no sentido de justificação das conjecturas).

Em traços gerais apenas o grupo A, a Ana e o Marco conseguiram atingir todos os objectivos das tarefas realizando com sucesso as construções solicitadas e desenvolvendo capacidades ao nível da formulação e teste de conjecturas e capacidade de argumentação na tentativa de explicar os seus raciocínios.

No que se refere aos outros dois grupos, o grupo B da Neuza e da Mélanie e o grupo C constituído pela Daniela e a Yulia as aprendizagens mais significativas foram relativas às isometrias. Nenhum dos grupos elaborou a conjectura referente à expressão matemática que é condição para pavimentar o plano não tendo por isso desenvolvido competências ao nível do desenvolvimento de capacidades de argumentação.

Tarefa 3

A terceira (e última) tarefa tinha como objectivo geral proporcionar aos alunos o estudo das pavimentações semi-regulares dando continuidade ao trabalho realizado com as tarefas anteriores. O objectivo final era chegar a um resultado algébrico importante na teoria das pavimentações e para isso as duas primeiras questões pretendiam encaminhar para esse resultado através da investigação do número de pavimentações semi-regulares que envolvem um triângulo equilátero ou um quadrado, neste caso com apenas três polígonos concorrentes num vértice. No final da tarefa pretendia-se que os alunos enumerassem as 21 pavimentações regulares possíveis que verificam $\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\cdots\frac{n_p-2}{n_p}=2.$

Com excepção do grupo A, nenhum dos outros conseguiu iniciar esta tarefa devido às dificuldades que iam tendo que ultrapassar na realização das tarefas anteriores. A Ana e o Marco iniciaram a investigação referente à parte I da tarefa, sobre o número de pavimentações semi-regulares com três polígonos concorrentes num vértice em que um deles é um triângulo equilátero. Concluíram sobre a primeira possibilidade mas depois da leitura mais atenta à ficha avançaram para a última questão (a identificação das pavimentações semi-regulares possíveis que verificassem a condição). Pediram para não construir as pavimentações (os *sketches*) e apresentaram apenas as justificações teóricas, apresentando o tipo de polígono e a respectiva amplitude do ângulo interno com a verificação de que a soma dos ângulos concorrentes no vértice da pavimentação era 360° (Fig. 20 e Fig. 21):

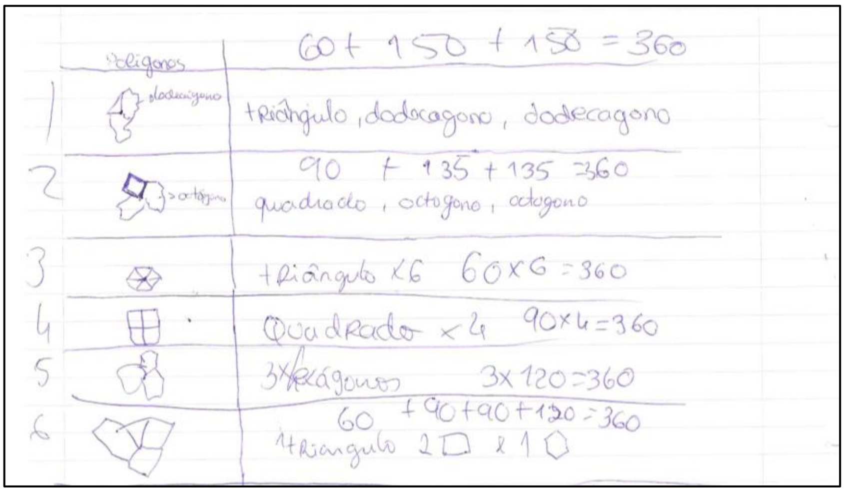


Figura 3.20 - Pavimentações semi-regulares; Tarefa 3; Grupo A

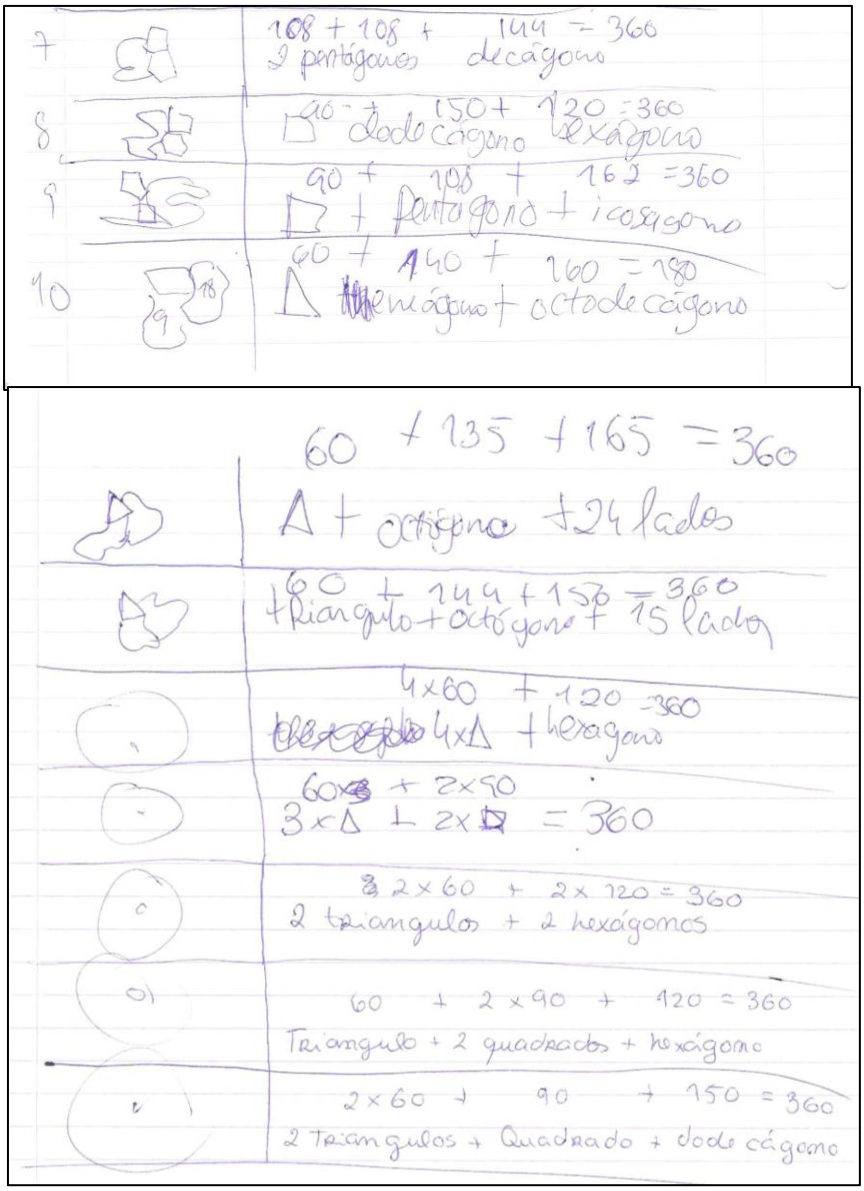


Figura 3.21 - Pavimentações semi-regulares; Tarefa 3; Grupo A

Os dois alunos enumeraram 17 dos 21 casos possíveis sem no entanto efectuarem qualquer verificação respeitante à igualdade. A condição que utilizaram para verificar se era ou não pavimentação foi a mesma condição cuja conjectura elaboraram e justificaram na tarefa 2 para as pavimentações regulares: “ a soma dos ângulos internos do polígono em volta do vértice da pavimentação tem que ser 360°” como se pode verificar da análise dos seus registos (Fig.20 e Fig.21).

Previamente à realização desta tarefa tinha sido disponibilizada a ficha informativa 4 que apresentava a definição de pavimentação semi-regular e a notação para identificar uma pavimentação regular que os alunos não sentiram necessidade de utilizar na realização da tarefa de investigação.

Em termos do trabalho efectuado a Ana e o Marco foram trocando ideias e “fazendo contas”, enquanto o Marco foi escrevendo a amplitude dos ângulos internos de todos os polígonos regulares a Ana foi experimentando todas as combinações possíveis, esboçando um vértice da pavimentação. Não quiseram utilizar o GSP porque a Ana dizia que “não era preciso” e “dava muito trabalho” e como o Marco concordou prosseguiram com “papel e lápis”.

Relativamente ao estudo das pavimentações e das suas propriedades foi o grupo da Ana e do Marco que conseguiu atingir um maior número de competências: reconhecem e identificam uma pavimentação regular e uma pavimentação semi-regular e mobilizam os conhecimentos relativos às propriedades dos polígonos no estudo das propriedades algébricas das pavimentações.

Em termos da utilização do AGD, no caso específico desta tarefa, os alunos dispensaram a sua utilização por considerarem que “não precisavam dele” uma vez que em causa estavam a aplicação de resultados algébricos e portanto o *software* não era uma mais-valia para a investigação. No entanto, teve um papel fundamental, como se descreveu nas actividades iniciais.

Para além da recolha dos dados relativos aos trabalhos apresentados pelos alunos (relatórios, respostas às questões e *sketches*) foram escolhidas duas alunas dos grupos A (a Ana) e C (a Daniela) para responderem a um questionário relativamente às expectativas relativamente à disciplina de Matemática, à aprendizagem da Geometria e à utilização do AGD no estudo da Geometria. O motivo pelo qual se escolheram apenas estas duas alunas foi por terem sido no grupo as alunas que mais trabalharam e se empenharam em cumprir com as tarefas e que em termos de grupo eram o elemento dominante. Não foi entrevistada nenhuma aluna do grupo C pelo facto de não ser possível o contacto (por razões de ordem pessoal as alunas deixaram de frequentar a escola durante um período de tempo). Este questionário foi aplicado depois da realização das tarefas, foi enviado por correio electrónico e devolvido respondido pelas alunas em questão. A Ana e a Daniela pertencem a grupos com um desempenho diferente em relação à concretização das tarefas e ao atingir dos objectivos de cada uma delas. No próximo capítulo será efectuada uma reflexão sobre as respostas das alunas à luz dos objectivos e questões deste estudo.

O desempenho dos grupos na realização das tarefas e no desenvolvimento de competências foi bastante diferenciado como se pode verificar pelo que se descreveu. Um dos grupos, o da Ana e do Marco, destaca-se dos restantes pela capacidade de trabalho e domínio dos conhecimentos adquiridos previamente, mobilizando-os com bastante confiança sempre que necessário facto que se constata, por exemplo, na construção das pavimentações utilizando isometrias. Em termos de raciocínio desenvolveram capacidades de argumentação, formularam e testaram conjecturas. O GSP contribuiu numa fase inicial como elemento motivador das aprendizagens e facilitador no teste de conjecturas favorecendo a experimentação. A partir de determinado momento deixou de ser, neste caso, imprescindível para a realização das tarefas, os alunos recorreram à justificação teórica para justificar resultados preferindo-a em detrimento da utilização do AGD. Os restantes grupos, pelo contrário, recorreram sempre à utilização do AGD para a investigação dos seus resultados dispensando a componente formal e teórica que alguns inclusivamente abandonaram. Os restantes grupos não chegaram a elaborar nem a testar conjecturas apesar de a meio do estudo dominarem a utilização das ferramentas do GSP e procederem à análise das construções que efectuavam procurando regularidades não foram capazes de generalizar mantendo a sua preocupação com a construção dos *sketches* e descurando as questões relativas ao estudo das propriedades algébricas das pavimentações. No entanto, o AGD foi manifestamente decisivo na consolidação de conhecimentos referentes às isometrias do plano que os alunos destes grupos não tinham adquirido. A maioria das aprendizagens destes alunos referiu-se não ao nível do estudo das propriedades algébricas das pavimentações mas sim ao estudo das propriedades geométricas nomeadamente as rotações e translações.

As lacunas dos alunos que não conseguiram terminar as tarefas foram sendo colmatadas de modo gradual com a ajuda da professora, a título individual e de acordo com as necessidades de cada grupo.

No próximo capítulo serão registadas as conclusões relativas à análise destes dados e efectuadas algumas considerações finais relativas a este estudo.

CAPÍTULO V - REFLEXÃO E CONCLUSÕES DO ESTUDO

Neste capítulo serão apresentadas as conclusões do estudo e algumas considerações pessoais resultado da experiência da professora enquanto investigadora. Pretende-se desta forma dar resposta às questões do estudo e possivelmente levantar algumas questões para futuras investigações.

Relembramos que este estudo pretende compreender de que forma um ambiente de geometria dinâmica como o GSP influencia o estudo da Geometria, no caso específico das pavimentações regulares e semi-regulares, colocando as seguintes questões:

A. Com a utilização de um ambiente de geometria dinâmica que tipo de aprendizagens estão associadas ao estudo das pavimentações?
B. Que tipo de conhecimentos os alunos mobilizam para a construção de pavimentações, quando utilizam um ambiente de geometria dinâmica?
C. A utilização do GSP em actividades específicas de exploração ou investigação em geometria influencia o modo como os alunos perspectivam o estudo da Geometria em geral?
D. A utilização do GSP desencadeia a necessidade de validação das conjecturas e demonstração (no contexto das propriedades das pavimentações)?

Os fundamentos teóricos para este estudo foram sobretudo respeitantes à utilização de ambientes de geometria dinâmica no ensino da Matemática, no caso específico da Geometria e na sua contribuição para o ensino da demonstração matemática sob a perspectiva da integração desta tecnologia no currículo da disciplina. Assim, foram analisadas algumas questões relativas à demonstração em Matemática à luz da utilização das novas tecnologias em contexto curricular e dos "novos" papéis que esta assume, referindo-se algumas questões pertinentes que poderão servir a futuras investigações.

A metodologia adoptada neste estudo é uma metodologia de natureza qualitativa, interpretando os dados e recorrendo ao estudo de caso como metodologia principal. A professora foi também a investigadora e principal responsável pela recolha de dados através da observação directa e notas de campo determinantes para a análise dos dados. Foram analisados em particular três grupos de uma turma do 10º ano de escolaridade de um curso profissional (técnico de Design Gráfico) pelo que o estudo de caso é múltiplo (Yin, 1993).

Para além da observação directa e notas de campo, o registo dos *sketches* produzidos pelos alunos e das suas respostas escritas assim como um questionário escrito, foram os outros dados recolhidos que serviram de fontes neste estudo. As actividades de investigação e exploração desenvolvidas foram descritas com base nas notas de campo da professora/investigadora e a sua análise resultou dos dados obtidos tendo sempre em atenção o enquadramento teórico definido a priori e os objectivos e questões do estudo.

Conclusões

Aprendizagens associadas ao estudo das pavimentações com AGD

A principal vantagem da utilização de AGD, neste caso o GSP é a realização de um elevado número de tarefas num espaço de tempo curto (Veloso, 1998). Todos os grupos em estudo conseguiram construir as pavimentações que lhes foram propostas o que de outra forma (com papel e lápis) não tinha sido possível em tempo útil. Desta forma, restou mais tempo para analisar as propriedades e focalizar o estudo no que se pretendia, neste caso algumas propriedades algébricas referentes às pavimentações embora, como se verá mais adiante, nalguns casos tenham sido as propriedades geométricas o foco das aprendizagens. O facto de os alunos manipularem as construções permitiu a exploração de resultados e da procura de propriedades quando distinguem o que “mexe” e o que permanece invariante (Veloso, 1998).

No caso específico das pavimentações, a utilização deste tipo de *software*, permite ainda através da construção de uma pavimentação a exploração de vários conceitos matemático/geométricos associados como por exemplo as isometrias, mais concretamente rotações e translações e eventualmente reflexões (embora nenhum dos grupos tenha utilizado). Estamos perante um ambiente de aprendizagem rico que permite, de acordo com a exploração que for efectuada, aprendizagens significativas sob variadas perspectivas: ao nível da mobilização de conhecimentos referentes às isometrias e ao nível da elaboração de conjecturas no domínio do raciocínio e demonstração matemáticos.

O nível de conhecimento dos alunos, como se veio a verificar, foi determinante para a concretização das tarefas propostas (Whiteley, 2000) uma vez que os alunos que compreendem bem a noção de rotação e translação, a Ana e o Marco, realizam as tarefas com facilidade enquanto os que não dominam bem os conhecimentos, os restantes grupos, demoram mais tempo em explorações e consequentemente a realizar as tarefas. A Ana e o Marco dominam bem os conhecimentos que têm apreendido sobre isometrias mobilizando-os na realização das tarefas e por isso concretizam-nas com sucesso, antes de todos os grupos, e têm mais tempo disponível para responder às questões colocadas. Recorrem igualmente aos conhecimentos relativos às propriedades dos polígonos, no que respeita aos ângulos, para concretizar as tarefas e encaram-nos como tarefa rotineira, construindo e explicando relações geométricas (Jones, 2005).

As alunas dos restantes grupos não tinham os conhecimentos consolidados no que diz respeito ao estudo das isometrias e portanto revelaram dificuldades na sua aplicação na construção das pavimentações. Neste caso, a utilização do AGD permitiu, através da exploração, a consolidação destes conceitos sendo que com o decorrer do tempo estes conhecimentos iam sendo aplicados sem qualquer dificuldade indo de encontro ao que diz Abrantes (1997), o AGD serviu de suporte para que estas alunas se apropriassem de processos fundamentais no que diz respeito a estes (isometrias) conceitos geométricos.

O grupo A, da Ana e do Marco, manipula as figuras e testa as conjecturas que vão elaborando sucessivamente, sem se aperceberem disso, apenas por manipulação dos *sketches* e portanto, por vezes, torna-se difícil distinguir entre o processo de elaboração de conjectura e o processo de teste da conjectura. Estes dois alunos manipulam as figuras que construíram, fazem medições, procuram regularidades e formulam conjecturas testando-as seguindo o processo descrito por Machado (2005): desenvolveram a actividade a partir de uma tarefa, geraram exemplos a partir da análise da situação, organizaram e analisaram esses exemplos procurando regularidades e relações e posteriormente testaram as suas conjecturas tentando encontrar um contra exemplo sendo que se verificaram duas situações distintas em tarefas diferentes: (a) encontraram um contra-exemplo e reformularam a conjectura (b) a conjectura resistiu a vários testes.

No caso da questão "será que todo o triângulo pavimenta o plano?", este grupo seguiu o percurso (b) e houve necessidade de partir para a sua demonstração, em grande parte por ser um dos objectivos da tarefa mas também porque se sentiram motivados a justificar o seu raciocínio. Para isso apresentaram argumentos e justificações formais, utilizando as propriedades dos triângulos relativas aos ângulos internos para justificarem a conjectura formulada.

A Ana utiliza claramente as diferentes funções da demonstração: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização (De Villiers, 1999) e para si a demonstração surge como um processo de busca do porquê de determinada conclusão, segundo ela "explicar como chegamos ao resultado" motivada pelo convencimento obtido com o *GSP* no caso, por exemplo, da pavimentação com triângulos.

No que se refere à tarefa sobre pavimentações regulares, a Ana e o Marco utilizam o GSP para a construção das pavimentações. No entanto a sua utilização não influencia directamente o processo de elaboração da conjectura, uma expressão matemática que relaciona o número de lados e os ângulos internos de um polígono regular que seja condição para que esse polígono pavimente o plano. Os alunos testam a conjectura sem utilizar o *software*, e abandonam as conjecturas cada vez que arranjam um contra - exemplo. Quando verificam que a conjectura é válida para todos os casos dão o trabalho como concluído e não sentiram necessidade de apresentar mais nenhum tipo de justificação.

Com o decorrer do tempo, a Ana e o Marco, não sentem necessidade em medir e manipular as figuras para elaborar as conjecturas e apresentam argumentos dedutivos para as suas explicações (Christou, 2004). Aliás, na última tarefa dispensam a utilização do GSP para a construção das pavimentações e apenas apresentam argumentos que justifiquem as suas generalizações

Os restantes grupos tiveram muita dificuldade em elaborar conjecturas sendo que esta foi uma das competências que não ficou adquirida. O grupo B, da Neuza e da Mélanie, esboçou uma tentativa para elaborar a conjectura no caso da pavimentação com triângulos, mas com uma linguagem confusa em que as ideias estão pouco claras e que contém erros, não desenvolvendo argumentos (formais ou informais) para a justificação do que tinham escrito. A tarefa seguinte (tarefa 2) foi cumprida correctamente no que diz respeito à construção dos *skeches*, sendo esta a preocupação constante das alunas desde o primeiro momento. Apesar de descobrirem e investigarem relações e propriedades geométricas, no caso específico das pavimentações (Jones, 2005) não são levadas a elaborar conjecturas sobre os seus resultados. Em termos de raciocínio demonstrativo não desenvolveram competências ao nível do desenvolvimento e justificação de argumentos.

O grupo C, a Daniela e a Yulia, mobilizam correctamente os conhecimentos que têm sobre rotações e translações para a construção das pavimentações. Na tarefa 1, sobre a questão "será que todo o triângulo pavimenta o plano?" efectuam a generalização mas, no entanto, não desenvolvem qualquer tipo de justificação para a mesma o que poderia indiciar que tenham respondido aleatoriamente à questão.

Muito à semelhança do grupo B, estas alunas manifestaram uma preocupação constante com a construção dos *sketches* e foram as únicas que exploraram as construções de pavimentações regulares com polígonos como octógonos, eneágonos e decágonos. Apresentaram sempre a mesma justificação para o facto de estes polígonos não pavimentarem "Os vértices da pavimentação não coincidem com os vértices do polígono. As arestas da pavimentação não coincidem com os lados do polígono", no entanto quando lhes é solicitada uma generalização, resultado das suas experiências, através da elaboração de uma conjectura não o fazem abandonando a tarefa.

Estes dois grupos (B e C) apesar de iniciarem um processo de investigação: observaram, registaram e manipularam mas não passaram a fase seguinte, a de conjecturar, testar e desenvolver teorias como explicação num processo como o que sugere Olive (2002). No que se refere à tarefa onde se pedia uma condição para que um polígono pavimente o plano, estes dois grupos, utilizaram a função de arrastamento do *software* para investigar propriedades aproveitando as potencialidades do mesmo no que diz respeito à verificação de casos particulares mas não conseguiram elaborar conjecturas a partir daí (generalização), grande parte das vezes foram registando as experiências realizadas como conjecturas mas nunca as formalizaram nem apresentaram raciocínios que de alguma forma as justificasse (validação). O grupo C, a Daniela e a Yulia, efectuou as construções com relativa facilidade, entenderam os conceitos teóricos mas provavelmente confundiram entre o que é experimentação e demonstração, como refere Hanna (2000).

O que se observou nestes dois grupos vai de encontro à preocupação manifestada por Mariotti (2010) quando refere que a facilidade de utilização do *software* "para compreender tais propriedades pode inibir alguns processos de argumentação que conduzem à procura de elementos úteis para a construção da demonstração" referindo-se às propriedades que permanecem invariantes.

Dos estudos de caso apresentados apenas no grupo A se verificou uma contribuição efectiva do GSP na elaboração de conjecturas, favorecendo raciocínios dedutivos utilizados na justificação das conjecturas apresentadas e no sentido que apontam Loureiro e Bastos (2000).

A motivação para a demonstração não surgiu em todos os grupos como se descreveu no ponto anterior. Apenas o grupo da Ana e do Marco elaboraram conjecturas condicionados pela realização das tarefas e pela atribuição de tarefas por parte do professor (Takáč, 2009). A Ana refere-o na resposta ao questionário sobre se efectuaria a demonstração caso não fosse solicitada responde que “provavelmente não”.

Os alunos, de uma maneira geral, consideram a Geometria um tema difícil, com muitas regras formais e sobre o qual revelam dificuldades. Por outro lado, de uma maneira geral os alunos encaram as tarefas realizadas com o apoio da tecnologia, e em especial com computadores, de uma forma mais lúdica. Os dois factores contribuíram para que a aprendizagem durante este tema se desenvolvesse de uma forma motivadora. Todos os alunos se empenharam na realização das tarefas, na construção dos *sketches* afirmando algumas vezes que o rigor com que lhes é permitido efectuar as construções num curto espaço de tempo tornou a aprendizagem mais aliciante e mais fácil. A vertente exploratória deste *software* permitiu um maior convencimento sobre a veracidade dos resultados que iam sendo apresentados (Hull e Brovey, 2004) facto que se constatou em todos os grupos relativamente à aplicação da primeira tarefa.

Nas respostas ao questionário sobre os conhecimentos matemáticos que adquiriram com a realização das tarefas, a Daniela escreve “Aprendi a fazer figuras geométricas e isso ajudou-me bastante em geometria”, neste caso a utilização do *software* permitiu que a aluna ultrapassasse algumas lacunas que tinha no âmbito da geometria, o AGD desempenhou um papel de exploração, desenvolvendo e aprofundando os conhecimentos matemáticos. No entanto, esta aluna não desenvolveu a capacidade de raciocínio no que se refere ao aspecto da demonstração em matemática com a utilização do GSP.

Nos grupos observados verifica-se que a utilização do GSP permitiu um maior envolvimento dos alunos nas tarefas propostas, num tema que à partida seria difícil e pouco motivante pelo facto de envolver construções geométricas com algum grau de dificuldade. Os alunos explorando as potencialidades do *software* conseguiram efectuar explorações significativas relativamente às propriedades das pavimentações e referem como vantagem da utilização do AGD muitas construções num curto espaço de tempo, como diz a Ana no seu questionário “a fazermos exercícios a mão demoraríamos imenso tempo” ao passo que a Daniela diz que a utilização do GSP é importante “porque aprendemos a construir figuras geométricas de maneira mais fácil”.

Quer a Ana quer a Daniela são duas alunas que afirmam que a Matemática não é a sua disciplina preferida e apesar de a Ana apresentar um bom desempenho na disciplina é uma aluna que precisa de motivação constante e de desafios e foi como desafio que encarou o processo de elaboração e justificação de conjecturas motivada pelos resultados obtidos através da exploração. Quando questionada sobre a importância da demonstração matemática responde "claro [que é importante] porque explicamos a forma como pensamos" e sobre o facto de ter efectuado uma demonstração escreve "gosto de desafios e sim consegui".

A Daniela foi a aluna que mais vezes referiu a importância da utilização do GSP na aquisição de conhecimentos ao nível das propriedades geométricas e da Geometria em geral, afirmando no questionário que a sua perspectiva em relação à Geometria tinha sido alterada através da realização das tarefas pois tinha conseguido "compreender coisas que até agora não percebi" e ainda acrescentou "agora até já gosto mais de Geometria".

Na globalidade, a utilização do GSP contribuiu para a investigação de relações e propriedades geométricas no decurso da construção das pavimentações, nomeadamente no caso das isometrias e num dos casos (grupo A) contribuiu de forma bastante acentuada para a elaboração de conjecturas e demonstração como forma de justificação de raciocínios. Foram descritas pelos alunos algumas das vantagens de utilização do GSP como o permitir várias construções num curto espaço de tempo e implicitamente a vantagem de confirmar as suas conjecturas.

Em síntese, observam-se comportamentos distintos nos alunos estudo de caso relativamente às aprendizagens que a utilização de um AGD como o GSP proporcionou. Para os alunos do grupo A, a utilização do *software* teve um papel mais preponderante no que se refere à elaboração e validação de conjecturas tendo sido utilizado como um meio para atingir um fim e a partir de certo momento foi inclusivamente posto de parte. Estes alunos, em especial a Ana, utilizam as funções de validação e explicação como funções da demonstração. Não têm dificuldades em apresentar e justificar os seus raciocínios embora apresentem alguma relutância em começar mas, quando iniciam sabem que resultados devem utilizar e não revelam dificuldade em manipular expressões algébricas redigindo de forma organizada. Para as alunas dos grupos B e C, as aprendizagens situaram-se ao nível da exploração das propriedades geométricas, nestes casos a utilização do GSP permitiu uma consolidação de conceitos referentes à geometria que não tinham sido bem apreendidos e serviu de motivação para o estudo de um tema que as alunas consideravam difícil e a que tinham alguma resistência aquando do inicio deste estudo. No final apresentaram como vantagens da utilização do *software* a compreensão de conceitos geométricos e inclusive referem uma melhoria no desempenho na disciplina de Geometria Descritiva. Em relação à demonstração matemática estas alunas revelaram bastantes dificuldades em elaborar conjecturas considerando a maioria das vezes que as experiências que realizavam eram justificações claramente confundindo entre o que é experimentação e validação. Em termos de motivação a utilização de tecnologia foi um factor positivo no estudo tendo sido referido por todos os alunos por considerarem as aulas mais estimulantes e "divertidas" e por tentarem "descobrir como é que são as coisas, em vez de ser a professora a explicar". O facto de terem trabalhado em grupo consideram ser importante pelo facto de poderem partilhar ideias e discutir factos e situações nomeadamente na construção de raciocínios, como refere a Ana no seu questionário "duas cabeças pensam melhor que uma", para além disso puderam trabalhar ao seu ritmo e de acordo com as suas limitações e foram efectivamente responsáveis pelas suas aprendizagens.

Considerações finais

Perante o que foi sendo exposto considera-se que o GSP enquanto tecnologia no ensino da Matemática desempenha um papel motivador das aprendizagens, criando hábitos de trabalho autónomo e a efectiva compreensão dos conceitos geométricos envolvidos nas tarefas quer pela própria filosofia do programa que "obriga" ao conhecimento de conceitos básicos para efectuar as construções, quer pela facilidade com que se podem efectuar construções sucessivas, por experimentação num curto espaço de tempo. Por outro lado conjugado com a aplicação de tarefas de natureza investigativa pode desenvolver nos alunos o desenvolvimento de competências ao nível da elaboração e justificação de raciocínios como forma de convencimento das situações que experienciam.

Como professora, a oportunidade de aplicar uma metodologia no ensino da geometria como a que foi utilizada neste estudo através da aplicação de tarefas de investigação e exploração aliada à utilização de tecnologia vai de encontro ao modo como se encara o ensino na disciplina de Matemática: os alunos através da experimentação são os grandes responsáveis pela construção dos seus conhecimentos, mobilizando aprendizagens e desenvolvendo capacidades de trabalho autónomo enquanto desenvolvem capacidades de raciocínio. No que se refere a este estudo em particular, foi possível reflectir sobre o tipo de aprendizagens dos alunos utilizando um AGD no caso específico das pavimentações regulares tendo-se verificado duas situações distintas: em dois dos casos as aprendizagens foram mais significativas ao nível da aprendizagem das propriedades geométricas relativas aos polígonos e consequentemente às propriedades das pavimentações enquanto num dos casos foram mais significativas no que se refere às capacidades de elaboração e validação de conjecturas, inserindo-se no âmbito do raciocínio e demonstração matemáticos. Tal como refere Jones (2005) pode demorar algum tempo até que surjam benefícios resultantes da utilização de AGD mas é um investimento que vale a pena no desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos em Geometria.

Em jeito de reflexão crítica e analisando as observações do trabalho desenvolvido pelos alunos à luz das tarefas desenvolvidas considera-se que em termos da utilização de *software* podiam ter sido exploradas com maior nível de aprofundamento as propriedades geométricas das pavimentações, relativas às isometrias por talvez proporcionarem uma maior interacção com o GSP, esta investigação aliada a questões relacionadas com o raciocínio matemático podem ser um domínio rico para futuras investigações, assim como o estudo do tipo de raciocínios envolvidos na elaboração de uma conjectura quando os alunos utilizam um AGD como o GSP.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1997) A tecnologia no currículo de Matemática : dez anos de investigação em Portugal. *Educação e Matemática, 45,* pp. 27-31. Lisboa: APM

Balacheff, N. (2008) The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40(3), pp. 501-512

Battista, M. T. e Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher, vol. 88 (1)* pp.48–54. (Consultado em http://investigations.terc.edu/library/bookpapers/geometryand_proof.cfm em 25/11/2010)

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Burril, G. (2008) The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics, *ICME 11 – TSG 22, International Congress on Mathematical Education*. Mexico (Retirado de http://www.tsg.icme11.org/document/get/218 em 30/11/2010)

Baccaglini-Frank, A. e Mariotti, M. (2010) Conjecturing and proving in dynamic geometry :the elaboration of some research hyphoteses, . *Proceedings of CERME 6 – working group 2*. Lyon

Bravo, Mª Pilar Colás; EISMAN, Leonor Buendia (1998). *Investigación Educativa*, 3ª Ed. Sevilha: Ediciones Alfar

Christou, C. (2004) Proof through exploration in dynamic geometry environments, . *Proceedings ofthe 28th Conference of the Internacional Group for the Psichology of Mathematics Education, Vol2,* pp. 215-222 Bergen (Retirado de http://www.emis.de/proceedings/PME28/ em 27/11/2010)

Coelho, M.I. e Saraiva, M.J. (2000) Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria, *Actas do IX encontro de investigação em educação matemática,* pp. 35-60. Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Costa, C. (2000) Visualização, veículo para a educação em geometria, *Actas do IX encontro de investigação em educação matemática,* pp. 157-184. Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Costello, J. (1997) Experiências imaginárias: Provas em ambiente de computador, *Educação e Matemática*, 45, pp. 51-55 (artigo traduzido *Micromath*, vol.10, nº3, 1994 pp.21-25, Association of Teachers of Mathematics, U.K.) . Lisboa: APM

Coutinho,C. C. *Estudos qualitativos*, Wiki em http://claracoutinho.wikispaces.com/Estudos+Qualitativos (acedido entre Novembro de 2010 e Janeiro de 2011)

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Emeryville CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, *63*, pp. 31-36. Lisboa: APM

De Villiers, M. (2002). Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração no ensino em geometria dinâmica. *Actas do ProfMat 2002*, pp. 65-72. Lisboa: APM.

De Villiers, M. (2003b). The value of experimentation in mathematics. *Proceedings of 9th National congress of AMESA*, pp. 174-185. South Africa. (Retirado de http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html, em 27/11/2010)

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. *Noesis* (18), pp. 64-66 (Retirado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ichagas/mi2/Fernandes.pdf, em 11/06/2011)

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99.* Lisboa: APM (Retirado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm, em 27/11/2010)

Hanna, G. (2000a). Proof and its classroom role: A survey. Actas do IX encontro de investigação em educação matemática (pp. 75-104). Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Healy, L e Hoyles, C (1998) Justifying and proving in school mathematics - *Technical Report On the Nationwide Survey*. Londres: Institute of education, University of London

Hoyles C., Healy L. (1999) Linking informal argumentation with formal proof through computer-integrated teaching experiments (Retirado de http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Hoyles/Hoyles99.html em 27/11/2010)

Hull, A.N. e Brovey, A.J. (2004) The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics. *ARE- Action Research Exchange, Vol3 (1)* USA: Department of Curriculum & Instructional Technology at Valdosta State University, Valdosta, Georgia (Retirado de http://teach.valdosta.edu/are/vol3no1/pdf/anhull-article.pdf em 27/11/2010)

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), pp. 55-85

Jones, K. (2001), Spatial thinking and visualisation. Em, *Teaching and Learning Geometry 11-19*. pp.55-56.London, UK: Royal Society,

Jones, K. (2001), Learning geometrical concepts using dynamic geometry software. Em, Kay Irwin (Ed.), *Mathematics Education Research: A catalyst for change,* pp. 50-58 New Zealand: University of Auckland

Jones, K. (2002a/2002b), Classroom Implications of Research on Dynamic Geometry Software. In: M. A. Mariotti (Ed), *European Research in Mathematics Education III*. (Section 9, p.59). Pisa: University of Pisa.

Jones, K. (2005), Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom. Em, Edwards, J. and Wright, D. (Eds.), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom*, pp.18-20. Derby, UK, Association of Teachers of Mathematics, 27-29 18(3),

Junqueira, M. e Valente, S. (1998) *Exploração de construções geométricas dinâmicas – Materiais para a sala de aula*. Lisboa: APM

Junqueira, M. e Valente, S. (1997) Conjecturas e provas em geometria – uma nova visita à ilha do triângulo equilátero, *Educação e Matemática, 45*, pp. 44-46 Lisboa: APM

Key Curriculum Press (2002). *Teaching Mathematics with The Geometer´s Sketchpad*. EUA: Key Curriculum Press.

Lima, Elon L. (2004). *Matemática e Ensino*. Lisboa: SPM+Gradiva

Lin,F. Hsieh, F., Hanna, G. De Villiers, M (Eds) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. Vol 2. Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Loureiro, C. e Bastos, R. (2000) Demonstração – uma questão polémica. *Actas do IX encontro de investigação em educação matemática,* pp. 105-128. Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad* (tese de mestrado) Lisboa: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

Mammana, C. e Villani, V. (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century–An ICMI Study*. London: Kluwer Academic Publishers.

Mariotti, M.A. (2006) Proof and proving in mathematics education. Em, Gutiérrez, A e Boero,P. (Eds) *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future,* pp 173-204. Rotterdam, Holland: Sense Publishers

ME (2004), *Programa da disciplina de Matemática da componente científica dos Cursos Profissionais de nível secundário*, Portugal: Ministério da Educação

ME (2001), *Programa da disciplina de Matemática (A e B) da componente científica dos Cursos Cientifico-Humanísticos de nível secundário*, Portugal: Ministério da Educação

ME (2001), *Programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais da componente científica dos Cursos Cientifico-Humanísticos de nível secundário*, Portugal: Ministério da Educação

Meirinhos, M. e Osório, A. (2010) O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER: revista de educação, Vol 2(2).* Bragança: IPB – ESSE. (Retirado de http://www.eduser.ipb.pt, em 27/06/2011)

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Olive, J. (2003). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. *Actas do IX Encontro de Investigação em Educação Matemática* - Fundão 2003. Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Olive, J., & Makar, K., with V. Hoyos, L.K. Kor, O. Kosheleva, & R. Straesser (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. Em C. Hoyles & J. Lagrange(Eds.*), Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*, pp. 133 –177. New York: Springer.

Pimenta, P. (2007). A geometria dinâmica no ensino básico e secundário. *Educação e Matemática*, 95, pp. 37 – 40. Lisboa: APM

Piteira, G. e Matos, J.F. (2000). Ambientes dinâmicos de geometria como artefactos mediadores para a aprendizagem da geometria. *Actas do IX Encontro de Investigação em Educação Matemática*, pp. 61-72. Fundão 2003. Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*,pp. 105-132. (Retirado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm, em 27/06/2011)

Ponte, J. P. & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*, pp. 95-131 Lisboa: Universidade aberta.

Santos, L.; Brocardo, J.; Pires, M. e Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J.P. Ponte; C. Costa; A. I. Rosendo; E. Maia; N. Figueiredo; A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação* (pp. 83-106). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. (Retirado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/des_curricular.htm, em 27/06/2011)

Stevenson, I. (2009). Dynamic Geometry and Proof: the Cases of Mechanics andNon-Euclidean Space, Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, pp.184-189. Taipei: Taiwan. The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Sträßer, R. (2002) Research on Dynamic Geometry Software (DGS) - an introduction. ZDM The International Journal on Mathematics Education 34 (3), pp. 65-77

Takáč, Z. (2009). Influence of MRP Tasks on Students' Willingness to Reasoning and Proving. In F-L. Lin, F-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. (Vol. 2, pp. 202-207). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

The Qualitative Report Em http://www.nova.edu/ssss/QR/BackIssues/index.html

Veloso, E. (1998). Geometria: Temas actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Whiteley, W. (2000) Dynamic geometry programs and the practice of geometry. Proceedings of the ICME 9. Tóquio (Retirado de http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf em 30/11/2010)

Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

Yin, R. (2005). *Estudo de Caso. Planejamento e Métodos*. Porto Alegre: Bookman.

ANEXOS

Anexo 1

TAREFA 0

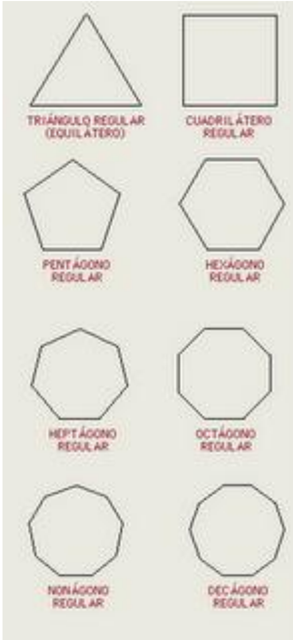
INVESTIGAÇÕES COM POLÍGONOS REGULARES

Conjectura

Uma ***conjectura*** é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento não verificado.

TAREFA

1. Construam polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular, … .
2. Meçam os ângulos internos de cada polígono.
3. Elaborem uma tabela onde conste o nome do polígono, o nº de lados e a amplitude do ângulo interno
4. Observem a tabela obtida e procurem relacionar o número de lados de cada polígono com a amplitude do ângulo correspondente.
5. Elaborem uma conjectura para o que encontraram anteriormente.
6. Procurem justificar a vossa conjectura.



Anexo 2

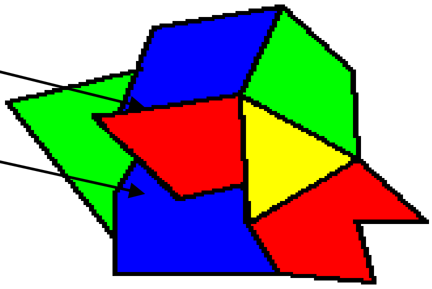
Ficha INFORMATIVA n.º 1

PAVIMENTAÇÕES

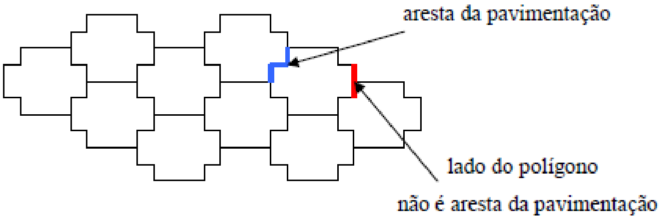
*Chama-se **Pavimentação do Plano** a um conjunto numerável de mosaicos ou ladrilhos que cobrem o plano **sem falhas nem sobreposições**.*

Vértice da pavimentação – qualquer ponto que resulte da intersecção de 3 ou mais ladrilhos.

Os vértices de uma pavimentação com polígonos não têm de coincidir com os vértices dos polígonos.



Aresta da pavimentação – qualquer arco, linha poligonal ou segmento que resulte da intersecção de dois ladrilhos.



PAVIMENTAÇÕES REGULARES

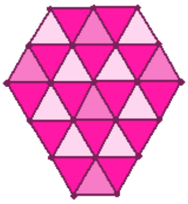
*Chamamos **pavimentações regulares** às pavimentações formadas por apenas um polígono regular disposto sempre do mesmo modo em torno de cada vértice. Os ladrilhos são polígonos regulares congruentes.*

Características das pavimentações regulares:

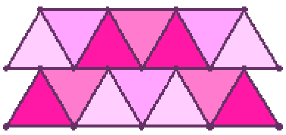
- Os vértices da pavimentação coincidem com os vértices do polígono
- As arestas da pavimentação coincidem com os lados do polígono

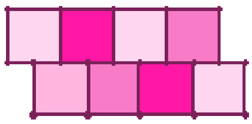
Exemplos:

Pavimentação regular com triângulos regulares



Não são pavimentações





Bibliografia:

- "Pavimentações" , ESEC
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/tiposdepavimentacao1.htm

Anexo 3

TAREFA 1

PAVIMENTAÇÕES REGULARES: PAVIMENTAÇÕES COM TRIÂNGULOS

I. No canto inferior esquerdo do monitor, e usando as ferramentas adequadas, constrói um triângulo ABC. Assim que marcares os 3 vértices do triângulo, no menu *Display* selecciona a opção *Show labels*.

Classifica o triângulo que obtiveste.

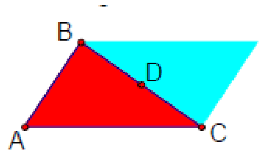
II. Selecciona os 3 vértices do triângulo e no menu *Construct* selecciona *Triangle interior*.

Podes optar pela cor da tua preferência no menu *Display*.

III. Selecciona o segmento BC e no menu *Construct* selecciona *Midpoint* (Este deverá ficar marcado como ponto D).

IV. Selecciona o ponto D e no menu *Transform* selecciona *mark as center*.

V. Selecciona o triângulo interior e no menu *Transform* selecciona *Rotate*, com a opção 180° (efectua uma rotação de 180° do triângulo)



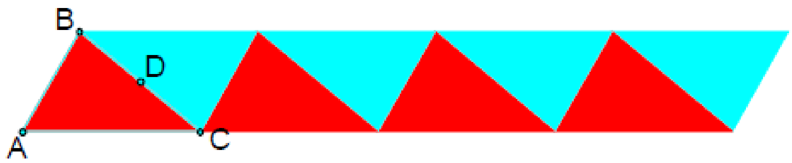
- Arrasta os pontos e observa o polígono que se obtém com os dois triângulos. Classifica esse polígono.

VI. Marca o segmento AC como vector: selecciona por esta ordem, o ponto A e depois o ponto C, depois no menu *Transform* selecciona *Mark Vector*. (uma animação indica o vector marcado)

VII. Selecciona os dois triângulos interiores e no menu *Transform* selecciona *Translate*.

VIII. Repete esta operação tantas vezes quantas as necessárias de modo a pavimentar o ecrã de uma ponta a outra.

Arrasta de modo a confirmar que o topo e a base desta fila de triângulos são sempre rectas.



IX. Do mesmo modo que procedeste acima, marca o vector AB e no menu *Transform* selecciona *Translate*, para efectuares a translação de toda a linha por este vector.

Repete este procedimento (de translação) até o ecrã estar cheio.

X. Arrasta de modo a confirmar que consegues de qualquer forma obter uma pavimentação.

XI. Grava o ficheiro como **pav_trig_*nomes***

1) Os triângulos que construíram pavimentam o plano. Consegues explicar porquê?
2) Será que todo o triângulo pavimenta o plano?
3) Elabora uma conjectura e justifica-a.

Anexo 4

Ficha INFORMATIVA n.º 2

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS – ISOMETRIAS

Os Matemáticos utilizam transformações geométricas para ajudá-los a entender a Natureza.
Os artistas usam transformações geométricas para criar obras de Arte.

Uma figura base pode ser utilizada várias vezes transformada utilizando Translações, reflexões e rotações.

Isometrias do Plano

Isometria - Transformação geométrica que preserva a distância entre pontos e consequentemente a amplitude dos ângulos.

Uma isometria transforma uma figura numa outra congruente.

Figuras congruentes – são figuras com o mesmo tamanho e forma, que coincidem ponto por ponto.

Rotação

Uma rotação de centro em C e ângulo de rotação α transforma um ponto P do plano num ponto P' tal que o segmento CP é igual ao segmento CP' e o ângulo PCP' tem amplitude α.

Translação

A translação do plano associada a um vector transforma qualquer ponto P do plano num ponto P' tal que o segmento PP' tem a mesma direcção, comprimento e sentido do vector considerado.

Reflexão

A reflexão do plano de eixo AB transforma qualquer ponto P do plano num ponto P' tal que o eixo de reflexão AB é a mediatriz do segmento PP'.

Anexo 5

Ficha INFORMATIVA n.º 3

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS – ISOMETRIAS com o GSP

O GSP permite fazer **translações**, **rotações** e **reflexões** de figuras utilizando comandos do **menu *Transform***.
Quando se utilizam estes comandos, as unidades de amplitude dos ângulos e as unidades de medida das distâncias podem ser definidas seleccionando o comando *Preferences* no **menu *Display***.

TRANSLAÇÃO segundo uma direcção

- Seleccionar o segmento que determina a direcção: escolher os dois extremos do segmento e no **menu *Transform***, seleccionar a opção ***Mark Vector***. Atenção que a ordem pela qual os pontos são seleccionados determina a direcção do vector.
- Seleccionar o polígono interior, lados e vértices do polígono que se pretende efectuar a translação.
- Seleccionar *Translate* no **menu *Transform***
- Verifica a caixa de diálogo e faz OK.

ROTAÇÃO segundo uma amplitude fixa

- Seleccionar o ponto que deverá ser o <u>centro de rotação</u> (duplo clique no ponto escolhido ou em alternativa seleccionar o ponto e no **menu *Transform*** seleccionar *Mark Center X*)
- Seleccionar o polígono interior, lados e vértices do polígono que se pretende efectuar a rotação.
- Seleccionar *Rotate* no **menu *Transform***
- Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida na caixa de diálogo e faz OK.

REFLEXÃO

- Seleccionar um segmento de recta que será o “espelho” – eixo de simetria (duplo clique no segmento escolhido ou em alternativa seleccionar o segmento e no **menu *Transform*** seleccionar *Mark Mirror*)
- Seleccionar o polígono interior, lados e vértices do polígono que se pretende efectuar a reflexão.
- Seleccionar *Reflect* no **menu *Transform***

Anexo 6

TAREFA 2

PAVIMENTAÇÕES REGULARES

Descobrir as pavimentações regulares/monoédricas possíveis.

I. Utilizando transformações geométricas e polígonos regulares, procede do mesmo modo que na tarefa 1 para explorar pavimentações com:

- Quadrados
- Pentágonos regulares
- Hexágonos
- Heptágonos
- Octógonos
- …

Descobrir as razões que fazem com que um polígono regular pavimente.

II. Grava cada ficheiro como **pav*_polígono_nomes***

1. Observa o vértice em cada uma das pavimentações obtidas.

i) Quantos polígonos “partilham” cada vértice?

ii) Comenta sobre a soma das amplitudes de todos os ângulos que partilham esse vértice.

iii) Como é que o valor que obtiveste em *ii)* está relacionado com o facto de esse polígono pavimentar?

2.

i) Qual é a amplitude do ângulo interno de um pentágono regular?

ii) É possível que três pentágonos regulares, sem sobreposições partilhem um vértice?

3. Completa a tabela de modo a organizar a tua informação:

		No caso de pavimentar		
Polígono	**Nº de lados do polígono**	**Nº de polígonos concorrentes num vértice**	**Amplitude do ângulo interno do polígono**	**Soma das amplitudes dos ângulos concorrentes num vértice**
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	10			

CONCLUSÕES

Observa todos os dados que registaste e responde às questões seguintes, justificando-as convenientemente

1) Qual é o nº mínimo de polígonos concorrentes num vértice? E o máximo? Justifica.

2) Quantas pavimentações regulares existem?

3) Utilizando a expressão para a amplitude do ângulo interno de um polígono regular, consegues escrever uma expressão matemática que seja condição para que esse polígono regular pavimente o plano?

4) Demonstra a tua conjectura (efectuada em 3)

5) Procura encontrar condições necessárias e suficientes para criar uma pavimentação regular

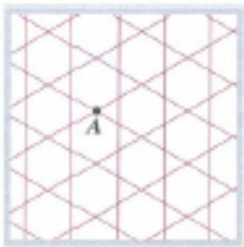
Anexo 7

Ficha INFORMATIVA n.º 4

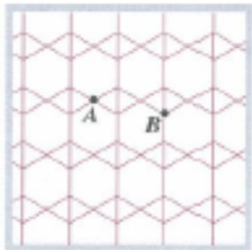
PAVIMENTAÇÕES SEMI-REGULARES

Chamamos ***pavimentações semi- regulares*** *às pavimentações formadas por* ***dois ou mais polígonos regulares dispostos sempre do mesmo modo (pela mesma ordem) em torno de cada vértice da pavimentação****. Os ladrilhos são dois ou mais polígonos regulares congruentes.*

Exemplos:



3.6.3.6.



3.3.6.6.

Estas pavimentações são ambas obtidas com hexágonos e triângulos, mas a configuração em cada vértice é diferente. Por isso têm códigos diferentes.

IDENTIFICAR UMA PAVIMENTAÇÃO SEMI-REGULAR

Para identificar uma pavimentação (código), basta contar o número de lados de cada polígono que forma cada vértice. Contornamos o vértice, começando pelo polígono com menor número de lados.

As diferentes pavimentações são devidas a:

- Diferentes polígonos
- Mesmos polígonos com diferentes disposições em torno dos vértices

Anexo 8

TAREFA 3

PAVIMENTAÇÕES SEMI-REGULARES

Gravem cada sketch que construírem

I. Considerem que queremos construir uma pavimentação em que num vértice concorrem exactamente <u>três polígonos regulares</u>, em que um deles é um <u>triângulo equilátero</u>.

Conseguem descobrir todos os casos possíveis. Enumerem-nos.

II. Considerem que queremos construir uma pavimentação em que num vértice concorrem exactamente três <u>polígonos regulares</u>, em que um deles é um <u>quadrado</u>.

Conseguem descobrir todos os casos possíveis. Enumerem-nos.

III. Se polígonos regulares de $n_1, n_2, \dots, n_p$ lados se encontram no vértice de uma pavimentação, teremos

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \cdots \frac{n_p - 2}{n_p} = 2$$

Com base nas observações anteriores (das tarefas I e II) conseguem dizer quantas e que escolhas são possíveis para os inteiros positivos $n_1, n_2, \dots, n_p$?

Elaborem um quadro onde registam a informação relevante.

Anexo 9

QUESTIONÁRIO INDIVIDUAL AOS ALUNOS 10ºF

TAREFAS COM GSP - PAVIMENTAÇÕES

NOME:____

Motivação I

1) Gostas de Matemática? Porquê?
2) Que importância tem esta disciplina para ti? Porquê?
3) Como gostas que sejam as aulas de Matemática?
4) Gostas de Geometria? Porquê?

Demonstração

5) Explica o que é para ti uma conjectura.
6) Explica o que é para ti uma demonstração matemática.
7) Consideras a demonstração matemática importante? Porquê?

Tecnologia e Geometer´s Sketchpad

8) Consideras importante a utilização de computadores na aula de Matemática? Porquê?
9) Consideras importante a utilização do GSP para estudar Geometria? Porquê?
10) Qual a tua opinião na utilização do GSP? (gostaste de trabalhar no programa, tiveste dificuldades, etc…)
11) Na utilização deste tipo de programas achas vantajoso o trabalho a pares?

Tarefas

12) Qual a tua opinião sobre as tarefas realizadas? (gostaste, foram difíceis, etc…)
13) Quais as principais dificuldades que tiveste? Como as ultrapassaste?
14) Formulaste conjecturas? Quais?
15) Tentaste demonstrar alguma conjectura? Porquê? Conseguiste? Terias tentado demonstrar se não fosse por indicação da professora?
16) Para que serve a demonstração?
17) É vantajoso trabalhar em grupo na realização destas tarefas? Porquê?
18) Para ti, quais foram os conhecimentos matemáticos que adquiriste/aprofundaste com a realização destas tarefas?

Motivação II

19) Achas que as tuas respostas às perguntas iniciais (1 a 4) foram condicionadas pela tua experiência nestas aulas? Porquê?
20) Refere aspectos positivos e aspectos negativos sobre o modo como decorreram as aulas.